Франц Герман

Группы симметричных конфигураций

www.franz-hermann.com

Конфигурацией n-го порядка будем называть замкнутую ломаную линию, узлы которой находятся в вершинах правильного n-угольника. Пример конфигураций 4-го порядка показан на Рис. 1. Для удобства узлы (точки) конфигурации будем показывать лежащими на окружности.

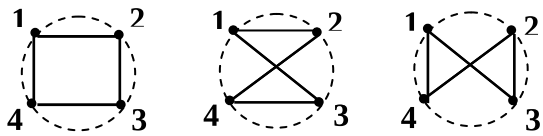


Рис. 1

Конфигурацию удобно задавать в виде цикла. Например: $\mathbf{1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1}$ или в виде перестановки 1243. Эта перестановка соответствует второй конфигурации Рис. 1. Эту же конфигурацию можно задать и перестановкой 1342 или 4312 и т. д.. Очевидно, что одну и ту же конфигурацию можно задать восьмью различными перестановками.

Рассмотрим знакопеременную группу из чётных подстановок четвёртого порядка A_4. Эта группа содежет 12 подстановок. Покажем все эти подстановки.

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix}; \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix}; \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4321 \end{pmatrix}; \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2143 \end{pmatrix};$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3124 \end{pmatrix}; \quad a_5 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2431 \end{pmatrix}; \quad a_6 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4213 \end{pmatrix}; \quad a_7 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1342 \end{pmatrix};$$

$$a_8 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2314 \end{pmatrix}; \quad a_9 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4132 \end{pmatrix}; \quad a_{10} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3241 \end{pmatrix}; \quad a_{11} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1423 \end{pmatrix}.$$

Нижний ряд чисел в подстановках можно рассматривать, как перестановку. Тогда каждому элементу a_i можно сопоставить одну из трёх конфигураций.

Рассмотрим подгруппы данной группы третьего порядка: $\{a_0, a_4, a_8\}$, $\{a_0, a_5, a_9\}$, $\{a_0, a_6, a_{10}\}$, $\{a_0, a_7, a_{11}\}$. Очевидно, все они между собой изоморфны, т. к. существует только одна группа третьего порядка. Но кроме того в каждой подгруппе находятся подстановки разных конфигураций. Такие группы будем называть **группами конфигураций**.

Группа $H_0 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ является нормальным делителем группы A_4. Тогда фактор-группа A_4/H_0 будет являться так же группой конфигураций, изоморфной группе третьего порядка. Элементами данной группы будут классы $H_0 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, $H_1 = \{a_4, a_5, a_6, a_7\}$, $H_2 = \{a_8, a_9, a_{10}, a_{11}\}$. Подстановки класса H_0 соответствуют первой конфигурации, показанной на Рис. 1. Соответственно подстановки классов H_1 и H_2 соответствуют второй и третьей конфигурации Рис. 1.

Известную [3] фактор-группу S_4/H_0 можно назвать удвоеной группой конфигураций. Эта группа S_4/H_0 изоморфна группе S_3, которая является неабелевой группой шестого порядка. Т. е. группа S_4/H_0 будет содержать по два класса H_i подстановок, каждая из которых соответствует какой-то одной конфигурации четвёртого порядка. Т. е. имеем два класса подстановок, соответствующих первой конфигурации (см. Рис. 1), два класса подстановок, соответствующих второй конфигурации и два класса подстановок – третьей конфигурации.

Т. о., мы убедились в существовании различных групп конфигураций.

Исследуем конфигурации специального вида. Эту заметку мы посвятим симметричным конфигурациям (СК) относительно вертикальной оси. Причём ось симметрии всегда будет проходить, как минимум, через одну точку нашей конфигурации. Обозначим эту точку цифрой 1. Среди конфигураций третьего и четвёртого порядков существует по дной такой симметричной конфигурации (Рис. 2).

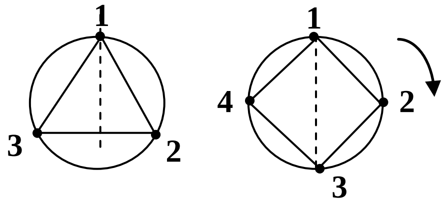


Рис. 2

Обход нумерации точек конфигурации всегда бедет по часовой стрелке. Как уже было сказано, окружность показана только для удобства изображения. Чтобы осуществлять операции над конфигурациями будем использовать подстановки специального вида. Например, конфигурациям, показанным на Рис. 2, соответствуют подстановки:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{123} \\ \mathbf{123} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{1234} \\ \mathbf{1234} \end{pmatrix}$$

Нижний ряд в подстановке описывает цикл конфигурации. Таким образом, подстановки $\begin{pmatrix} \mathbf{123} \\ \mathbf{132} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \mathbf{1234} \\ \mathbf{1432} \end{pmatrix}$ будут описывать те же самые конфигурации (Рис. 2).

Рассмотрим конфигурации пятого порядка. Не трудно убедиться, что интересующих нас конфигураций всего четыре штуки (Рис. 3).

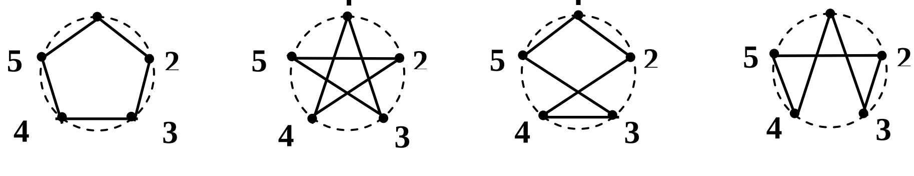


Рис. 3

Действительно, все они обладают осевой симметрией и ось симметрии проходит через точку 1.

Покажем, что подстановки, описывающие эти конфигурации, образуют группу. Очевидно, что единичной подстановкой будет подстановка, которая описывает первую конфигурацию на Рис. 3. Закон ассоциативности обеспечен правилом умножения подстановок [1]. Докажем, что перемножение двух подстановок даёт подстановку того же вида. Причём, докажем это в общем виде для подстановок любого порядка.

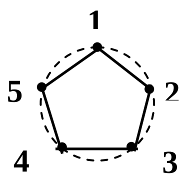
Рассмотрим произведение подстановок, каждая из которых соответствует некоторой симметричной конфигурации нечётного порядка.

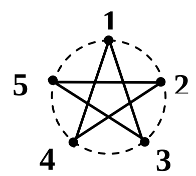
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\ 2\cdots a_k\cdots\cdots a_{2n+1-k}\cdots a_{2n-1}\\ 1a_1\cdots a_i\cdots\cdots\ a_j\ \cdots\ a_t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\ 2\cdots a_i\cdots\cdots a_j\cdots a_{2n-1}\\ 1b_1\cdots b_p\cdots\cdots b_q\cdots\ b_r\end{pmatrix}=\boldsymbol{c},$$

здесь $a_{2n-1}=2n-1$, $a_1+a_t=a_i+a_j=b_1+b_r=b_p+b_q=2n+1$, т. е. a_i и b_i симметричны относительно начала и конца ряда $\{2,\ 3,\ \cdots,\ 2n-1\}$ - это следует из симметричности конфигурации, $n=\{2,\cdots\}$, $j=2n+1-i$.

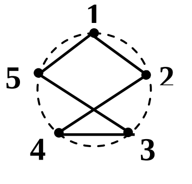
$$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\ 2\cdots a_k\cdots\cdots a_{2n+1-k}\cdots a_{2n-1}\\ 1c_1\cdots c_p\cdots\cdots\ c_q\ \cdots\ c_s\end{pmatrix},\ \text{где}\ c_p=b_p,\ c_q=b_q.$$

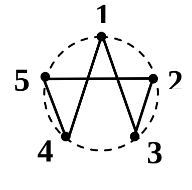
Как видим, в силу правила перемножения подстановок, полученная подстановка будет также соответствовать некоторой симметричной конфигурации. Т. е. множество подстановок, соответствующее симметричным конфигурациям, является замкнутым множеством относительно умножения подстановок. Т. к. множество замкнуто, то уравнение $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}$, где $\boldsymbol{e}=\begin{pmatrix}12345\\12345\end{pmatrix}$ будет иметь решение $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}^{-1}$. Т. о все групповые аксиомы выполняются и мы будем иметь группу $G_8(5)$. Данное обозначение говорит, что это группа 8-го порядка и построена она на подстановках 5-го порядка. Введём обозначения для элементов группы и покажем её таблицу Кэли.





$$a_0=\begin{pmatrix}12345\\12345\end{pmatrix};\ a_1=\begin{pmatrix}12345\\15432\end{pmatrix};\qquad a_2=\begin{pmatrix}12345\\13524\end{pmatrix};\ a_3=\begin{pmatrix}12345\\14253\end{pmatrix};$$





$$a_4=\begin{pmatrix}12345\\12435\end{pmatrix};\ a_5=\begin{pmatrix}12345\\15342\end{pmatrix};\qquad a_6=\begin{pmatrix}12345\\13254\end{pmatrix};\ a_7=\begin{pmatrix}12345\\14523\end{pmatrix}.$$

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	a_1	a_0	a_3	a_2	a_5	a_4	a_7	a_6
a_2	a_2	a_3	a_1	a_0	a_6	a_7	a_5	a_4
a_3	a_3	a_2	a_0	a_1	a_7	a_6	a_4	a_5
a_4	a_4	a_5	a_7	a_6	a_0	a_1	a_3	a_2
a_5	a_5	a_4	a_6	a_7	a_1	a_0	a_2	a_3
a_6	a_6	a_7	a_4	a_5	a_2	a_3	a_0	a_1
a_7	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0

Всего групп 8-го порядка пять [2]. Три абелевых и две неабелевых. Определяющие уравнения этой группы имеют вид:

$$(a_2)^4 = a_0, \quad (a_4)^2 = a_0, \quad a_2 \cdot a_4 = a_4 \cdot (a_2)^3$$

Группа $G_2(5) \equiv \{a_0, a_1\}$ является нормальным делителем H_0 для группы $G_8(5)$. Тогда фактор-группа $G_8(5) / G_2(5) = K_4(5)$ будет абелевой группой конфигураций 4-го порядка для симметричных конфигураций 5-го порядка. Элементами этой группы будут классы: $H_0 \equiv \{a_0, a_1\}$, $H_1 \equiv \{a_2, a_3\}$, $H_2 \equiv \{a_4, a_5\}$, $H_3 \equiv \{a_6, a_7\}$.

Рассмотрим симметричные конфигурации 6-го порядка. Как это ни удивительно, таких конфигураций оказалось всего четыре (Рис. 4).

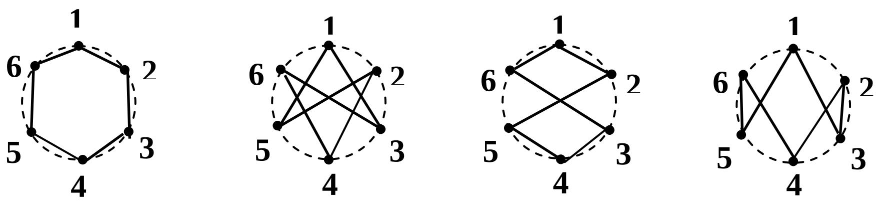


Рис. 4

Введём общее обозначение для числа симметричных конфигураций: $C(i)$, где i – порядок конфигурации (число узлов или точек). Тогда заметим, что $C(3) = C(4) = 1$ и $C(5) = C(6) = 4$. Возникает предположение, что $C(2n-1) = C(2n)$. Действительно это так. Покажем преобразование симметричной конфигурации третьего порядка в симметричную конфигурацию четвёртого порядка. Для начала выясним из каких элементарных частей состоит симметричная конфигурация.

Рассмотрим, например, конфигурацию пятого порядка (Рис. 5).

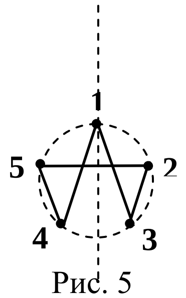


Рис. 5

Грубо говоря, конфигурация – это цикл в который обединены 5 точек отрезками прямых. Какая бы конфигурация ни была, она не может содержать внутреннего цикла. Напомним, что мы рассматриваем конфигурации, симметричные относительно вертикальной оси, проходящей через точку 1. Всякая нечётная конфигурация имеет только один горизонтальный отрезок независимо от порядка конфигурации. В противном случае мы получали бы самостоятельный цикл, отличный от данной конфигурации. Горизонтальные отрезки будем обозначать через $\boldsymbol{L_i}$, а всё множество таких отрезков – через $\boldsymbol{L}$. Т. о. конфигурации пятого порядка состоят из элементов множества $\boldsymbol{L} = \{\boldsymbol{L_1}, \boldsymbol{L_2}\}$, где $\boldsymbol{L_1}$ - отрезок 52, а $\boldsymbol{L_2}$ - отрезок 34. Кроме этого всякая СК в своём цикле имеет несколько пар симметричных отрезков, которые будем обозначать: $\boldsymbol{P_i}$. А множество таких пар обозначим через $\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, \boldsymbol{P_3}, \boldsymbol{P_4}\}$, где $\boldsymbol{P_1}$ - это отрезки 12 и 15, $\boldsymbol{P_2}$ - это отрезки 23 и 45, $\boldsymbol{P_3}$ - это отрезки 13 и 14, $\boldsymbol{P_4}$ - это отрезки 42 и 35. Тогда любую СК пятого порядка можем записать формулой:

$$\boldsymbol{C_m} = \boldsymbol{P_i} \cup \boldsymbol{P_j} \cup \boldsymbol{L_k}. \qquad (1)$$

Конфигурация, показанная на Рис. 5 будет иметь формулу: $\boldsymbol{C_4} = \boldsymbol{P_2} \cup \boldsymbol{P_3} \cup \boldsymbol{L_1}$.

Теперь вернёмся к преобразованию СК третьего порядка в СК четвёртого порядка.

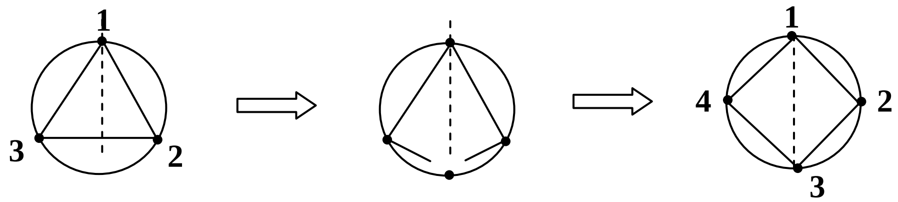


Рис. 6

Процесс преобразования показан на Рис. 6. На первом этапе отрезок 23 разрывается. Потом добавляется дополнительная точка. И свободные концы, разорванного отрезка, присоединяются к новой точке. Однозначно получаем СК большего на единицу порядка.

Аналогичным образом СК пятого порядка можно преобразовать в СК шестого порядка. Возникает вопрос: сколько вообще существует различных $\boldsymbol{C(2n-1)}$?

Сначала выясним, как вычислять количество элементов для множеств $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{P}$.

Всего точек в конфигурации $\boldsymbol{2n-1}$, где $\boldsymbol{n} = \{\boldsymbol{2}, \cdots\}$. Одна точка принадлежит оси симметрии. Остальные парами обединяются в элементы $\boldsymbol{L_i}$. Тогда можем записать: $\dfrac{\boldsymbol{(2n-1)-1}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{n-1}$.

$$\boldsymbol{L(2n-1) = n-1} \qquad (2)$$

Множество $\boldsymbol{P}$ состоит из симметричных пар отрезков. Из числа сочетаний $\boldsymbol{2n-1}$ точек конфигурации по две точки надо вычесть горизонтальные отрезки, т. е. множество $\frac{1}{2}\boldsymbol{L}$: $\frac{1}{2}\left(C_{2n-1}^{2}-\frac{1}{2}L\right)=\frac{(2n-1)(2n-2)-(n-1)}{2}=(n-1)^2$.

$$P(2n-1)=(n-1)^2. \qquad (3)$$

Пример: $n=3$, $L(5)=2$, $P(5)=4$

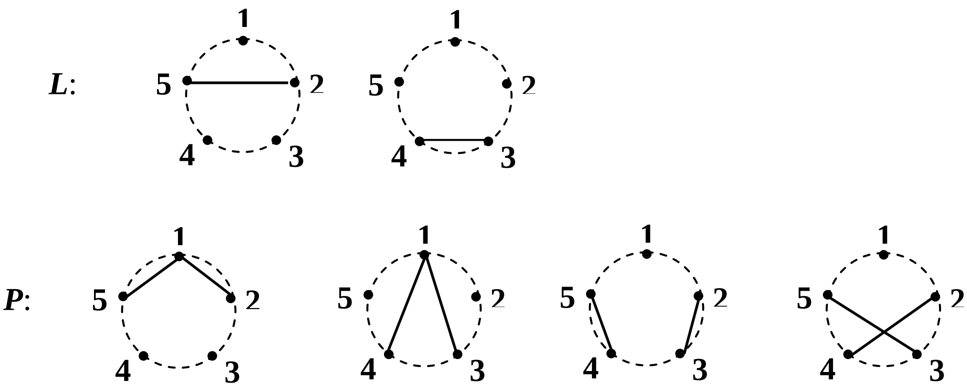


Рис. 7

Т. о. между этими двумя множествами получается простая зависимость:

$$P=L^2. \qquad (4)$$

Теперь можем рассмотреть схему построения СК.

Сначала покажем рекурентную формулу перехода от конфигурации порядка $\boldsymbol{2n-3}$ к конфигурации порядка $\boldsymbol{2n-1}$ (Рис. 8).

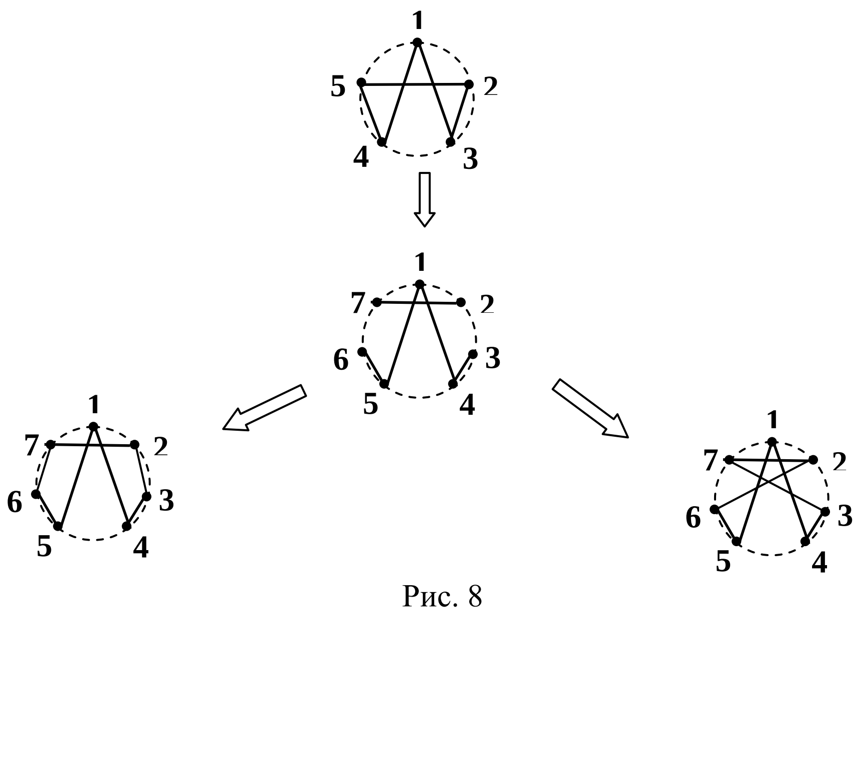


Рис. 8

На Рис. 8 показан пример преобразования конфигурации пятого порядка в две конфигурации седьмого порядка (все СК седьмого порядка мы покажем в приложении). На первом этапе происходит дополнение двух точек по отрезку 52. Получаем новый элемент 72 из множества $\boldsymbol{L}$ для конфигураций седьмого порядка. На втором этапе получаем две новых конфигурации (отсюда коэффициент 2 в рекурентной формуле (5)). Очевидно, такое преобразование однозначно. Количество элементов множества $\boldsymbol{L}$ - величина известная, можем записать рекурентную формулу.

$$\boldsymbol{C}(2\boldsymbol{n}-1)=2\cdot\boldsymbol{L}(2\boldsymbol{n}-1)\cdot\boldsymbol{C}(2\boldsymbol{n}-3). \tag{5}$$

Пример: $\boldsymbol{n}=6$, $\boldsymbol{L}=5$.

$$\boldsymbol{C}(2\boldsymbol{n}-1)=\boldsymbol{C}(11)=2\cdot 5\cdot\boldsymbol{C}(9);$$
$$\boldsymbol{C}(11)=2\cdot 5\cdot(2\cdot 4\cdot\boldsymbol{C}(7))=2\cdot 5(2\cdot 4(2\cdot 3\cdot\boldsymbol{C}(5)))=2\cdot 5(2\cdot 4(2\cdot 3\cdot(2\cdot 2\cdot\boldsymbol{C}(3)))),$$

Помним, что $\boldsymbol{C}(3)=1$, $\boldsymbol{C}(11)=2^4\cdot 5!=1920$.

Обобщая полученный результат, можем записать общую формулу:

$$\boldsymbol{C}(2\boldsymbol{n}-1)=2^{\boldsymbol{n}-2}\cdot(\boldsymbol{n}-1)! \tag{6}$$

В качестве резюме к нашему исследованию можем записать, что подстановки симметричных конфигураций объединены фактор-группой конфигураций:

$$\boldsymbol{G}_{2\boldsymbol{C}(2\boldsymbol{n}-1)}(2\boldsymbol{n}-1)\Big/\boldsymbol{G}_2(2\boldsymbol{n}-1)=\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{C}(2\boldsymbol{n}-1)}(2\boldsymbol{n}-1). \tag{7}$$

Литература

1. Э. Фрид, «Элементарное введение в абстрактную алгебру»,М., «Мир», 1979
2. О. Ю. Шмидт, «Абстрактная теория групп», Киев, «Изд. Киевского ун-та», 1916
3. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзликин, «Основы теории групп», М., «НАУКА», 1977
4. П. С. Александров, «Введение в теорию групп», М, «НАУКА», 1980
5. Ю. А. Бахтурин, «Основные структуры современной алгебры», М, «НАУКА», 1990
6. О. В. Мельников и др., «Общая алгебра. Т. 1», М. «НАУКА», 1990
7. А. Г. Курош, «Теория групп», М., «НАУКА», 1967
8. А. Г. Курош, «Курс высшей алгебры», М., «НАУКА», 1971
9. Б. Л. Ван дер Варден, «Алгебра», М., «НАУКА», 1976
10. М. Холл, «Теория групп», М., «ИЛ», 1962

Приложение 1

Группа СК седьмого порядка

Покажем все СК седьмого порядка.

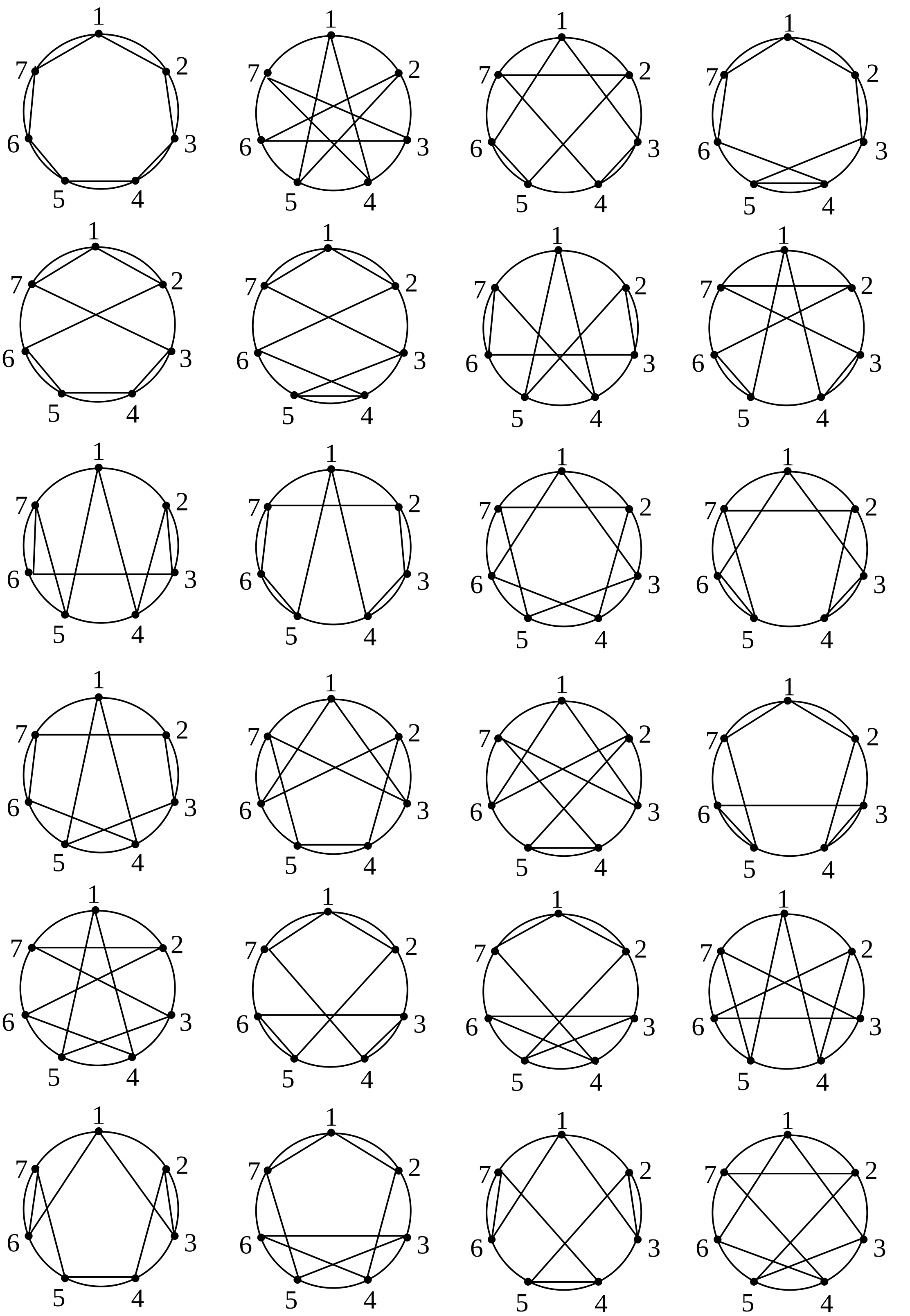


Рис. 9

Элементы множеств $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{L}$ имеют вид:

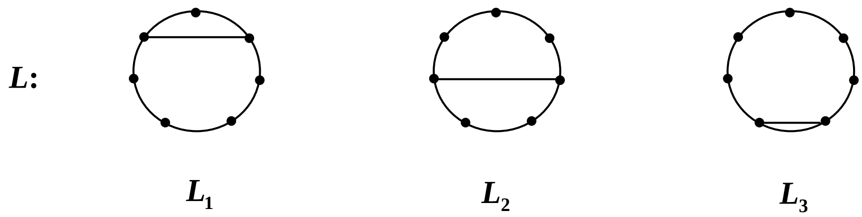


Рис. 10

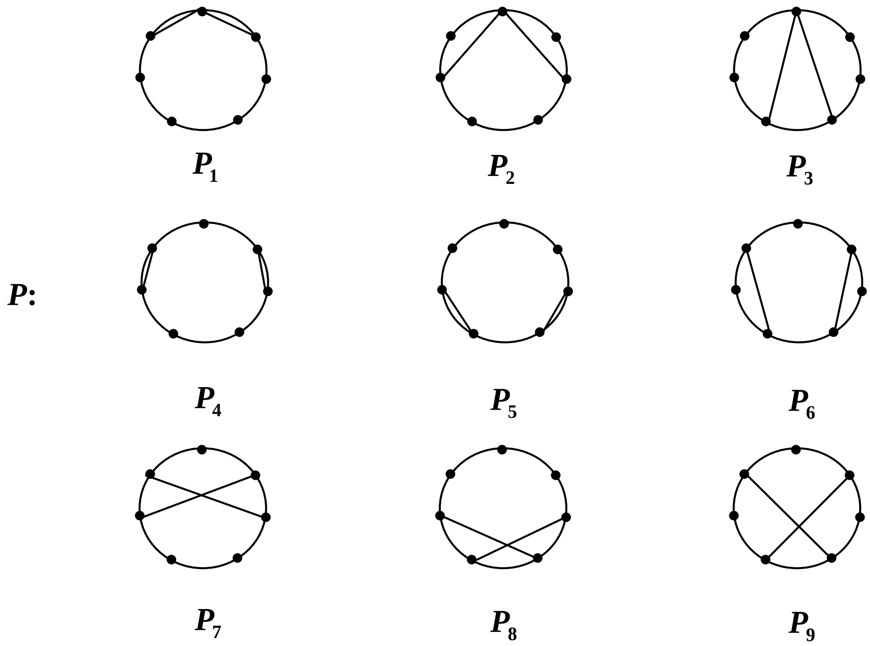


Рис. 11

Общая формула СК седьмого порядка имеет вид: $\boldsymbol{C_m = P_i \cup P_j \cup P_k \cup L_s}$.
Пример:

$$\boldsymbol{C_3 = P_2 \cup P_5 \cup P_9 \cup L_1}$$

Подстановки, описывающие эту СК имеют вид: $\boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} \mathbf{1234545} \\ \mathbf{1347256} \end{pmatrix}$, $\overline{\boldsymbol{a_3}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1234545} \\ \mathbf{1652743} \end{pmatrix}$.

Число симметричных конфигураций можно вычислить по формуле: $\boldsymbol{C(2n-1) = 2^{n-2} \cdot (n-1)! = C(7) = 2^2 \cdot 3! = 24}$ (см. Рис. 9).

Все эти подстановки объединены фактор группой: $\boldsymbol{G_{48}(7)} / \boldsymbol{G_2(7)}$. Эта группа изоморфна группе 24-го порядка. Всего таких групп 15. Какая из них изоморфна нашей фактор-группе мы выяснять здесь не будем.

Приложение 2

Число различных конфигураций простого порядка

Известно, что число конфигураций $\boldsymbol{Q}$ можно подсчитать по формуле:

$$Q(n) = \frac{(n-1)!}{2}. \qquad (8)$$

Например, при $n = 4$ получаем $Q(4) = 3$, т. е различных конфигурации. Эти конфигурации мы видим на Рис.1. Но по сути, вторая и третья конфигурации эквивалентны с точностью до поворота. А как вычислить, сколько истинно различных конфигураций $\boldsymbol{R}$?

Обозначим чкрез $\boldsymbol{S}$ число конфигураций, которые совпадают сами с собой (совмещаются) при повороте на угол $\frac{360°}{n}$. Для пятиугольников – это первая и вторая конфигурации Рис. 3. Для семиугольников – это первая, вторая и одиннадцатая конфигурации Рис. 9. Очевидно, что для n простого число таких конфигураций можно посчитать по формуле $S(n) = \frac{n-1}{2}$. Тогда для простого n формула для числа различных конфигураций будет: $R(n) = \frac{1}{n}(Q(n) - S(n)) + S(n)$ или:

$$R(n) = \frac{(n-1)! + (n-1)^2}{2n} \qquad (9)$$

Если перейти к новым обозначениям: $m = 2n - 1$, где m – простое, а $n = 2, \cdots$, то в обозначениях нашего исследования последнюю формулу можно переписать таким образом:

$$R(m) = \frac{[2 \cdot L(m)]! + 2 \cdot P(m)}{2m}. \qquad (10)$$