

Франц Герман

Мактоида и упаковки.

Об одном разгибании окружности и замкнутых клеточных полях.
(www.franz-hermann.com)

*Математики имеют обыкновение изучать вещи,
кажущиеся советиенно бессмысленными, но...*
(Мартин Гарднер[1])

Представим себе, что у нас имеется окружность, сделанная из некоторого фантастического материала, который можно гнуть. Причём, разгибая окружность, этот материал всё равно сохраняет конфигурацию, имеющую вид части окружности (Рис. 1).

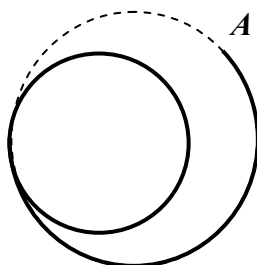


Рис. 1

Пусть разгибание окружности начинается из точки O (т. е. окружность в точке O разорвана). Поместим в эту точку начало координат, как показано на Рис. 2.

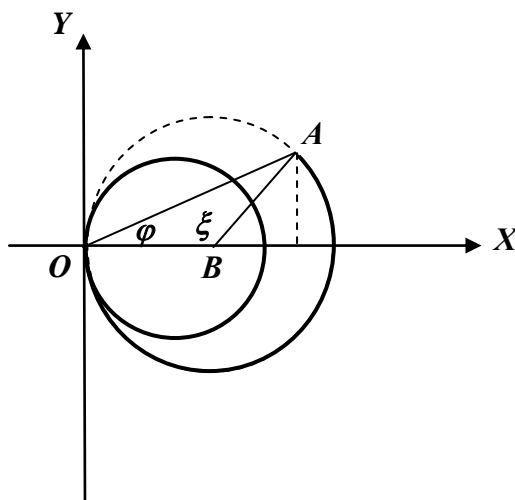


Рис. 2

Пусть центр разогнутой окружности всегда лежит на оси абсцисс. Т. е. точка B – центр разогнутой окружности. Обозначим угол OBA через ξ , а угол AOB – традиционно через φ , как принято в полярной системе координат. Обозначим через R радиус исходной окружности (не разогнутой), а $AO = \rho$. Тогда можем записать $OB(2\pi - \xi) = 2\pi R$. С другой стороны имеем: $2\pi - \xi = \pi + 2\varphi$, т. е. можем записать: $OB = \frac{2\pi R}{\pi + 2\varphi}$. Точка A имеет

координаты: $(x; y)$. Из подобия треугольников получаем такую пропорцию: $\frac{OB}{\frac{\rho}{2}} = \frac{\rho}{x}$ или

$OB = \frac{\rho}{2\cos(\varphi)}$. Приравняв выражения для OB , находим формулу для кривой, которую описывает точка A при разгибании окружности.

$$\rho = 4\pi R \frac{\cos(\varphi)}{\pi + 2\varphi}, \quad (1)$$

здесь φ пробегает значения в интервале $\left[\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$ при условии, что ρ движется по часовой стрелке. В декартовой системе координат получаем такую кривую:

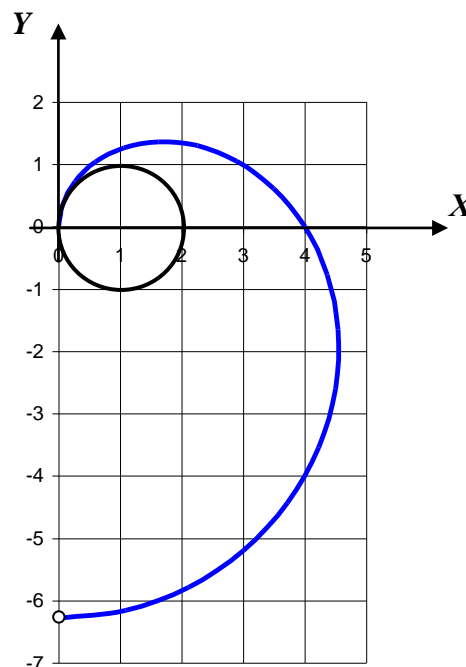


Рис. 3

Здесь радиус исходной окружности $R = 1$.

Рассмотрим разгибание сразу двух окружностей одинакового радиуса (Рис. 4).

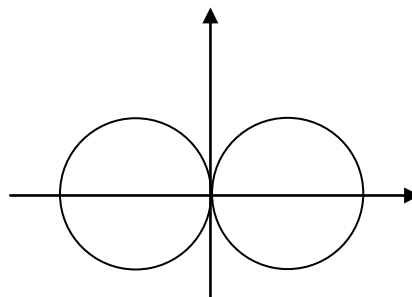


Рис. 4

В этом случае будем иметь такую кривую.

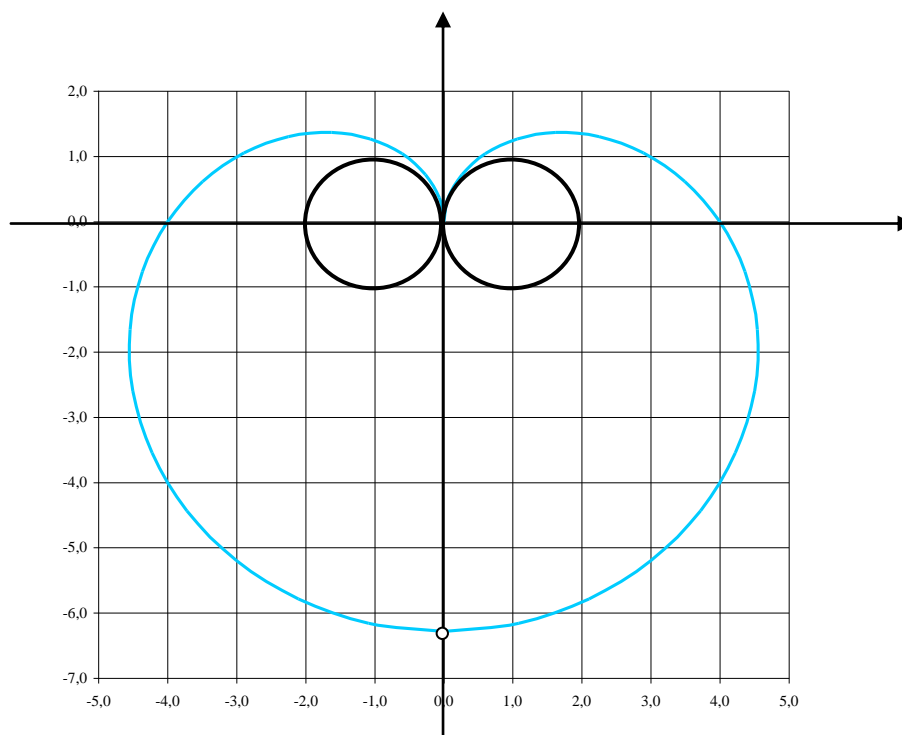


Рис. 5

С лёгкой руки поэта*) эта кривая была названа **Мактоида**. Не правда ли, Мактоида что-то напоминает? Действительно, возникает ощущение, что перед нами ни что иное, как известная кривая Кардиоида. Напомним о ней. Кардиоидой называют кривую, которая описывается точкой окружности, катящейся без скольжения по окружности, с таким же радиусом (Рис. 6).

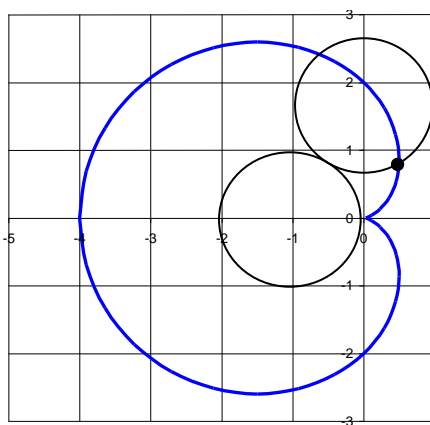


Рис. 6

Уравнение Кардиоиды имеет вид [2]: $\rho = 2R(1 - \cos(\varphi))$, где R – радиус окружностей, определяющих кривую. Для более удобного сравнения Кардиоиды и Мактоиды развернём последнюю на 90° по часовой стрелке.

*) Красноярская поэтесса Л. Н. Беспалова

7. Для этой цели разгибать окружность требуется таким образом, как показано на Рис.

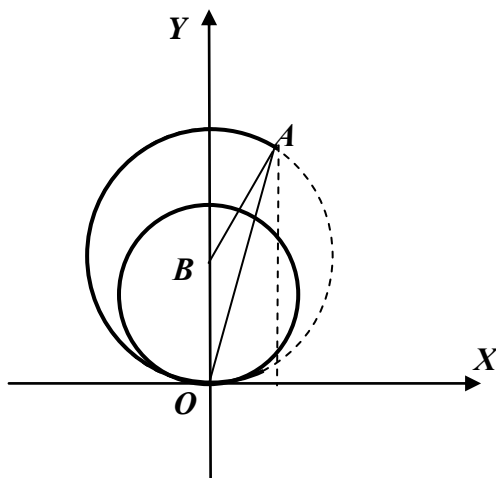


Рис. 7

Теперь центры разогнутых окружностей будут лежать на оси ординат. Одной из таких точек и является точка B . Точка A имеет координаты: $(x; y)$.

Введём обозначения. $OA = \rho$, угол $\angle BOA = \alpha$, угол $\angle ABO = \beta$, угол $\angle AOX = \varphi$, радиус исходной окружности равен R . Теперь можем записать: $OB(2\pi - \beta) = 2\pi R$ или $OB(\pi - \varphi) = \pi R$. Из подобных треугольников имеем пропорцию: $\frac{OB}{OA} = \frac{OA}{y}$ или $\frac{OB}{2} = \frac{\rho}{y}$

$2OB = \frac{\rho}{\sin(\varphi)}$. И подставляя выражение для OB , получаем:

$$\rho = 2\pi R \frac{\sin(\varphi)}{\pi - \varphi}. \quad (2)$$

Это и есть уравнение Мактоиды, развёрнутой на 90° .

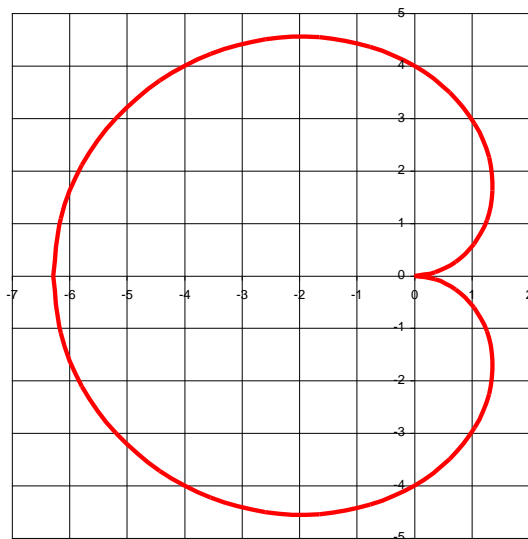


Рис. 8

Наложив обе кривые на одну и ту же координатную сетку можно явно увидеть различия между Мактоидой и Кардиоидой.

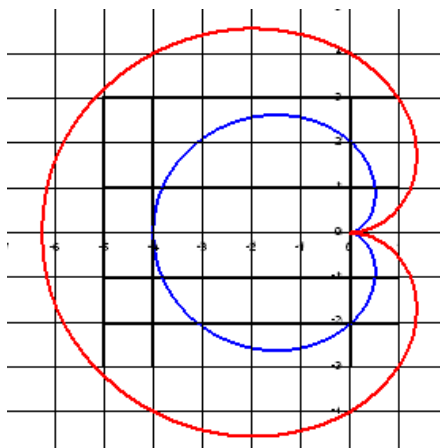


Рис. 9

Если использовать координатные преобразования подобия $X_M = k_1 \cdot X_K$ и $Y_M = k_2 \cdot Y_K$, то с некоторой точностью можно «натянуть» одну кривую на другую, но это будет не математическая точность, т. к. отношение уравнений этих кривых имеет не линейное, а довольно сложное выражение:

$$p = \frac{\rho_M}{\rho_K} = \frac{\pi}{\pi - \varphi} \operatorname{Ctg} \left(\frac{\varphi}{2} \right). \quad (3)$$

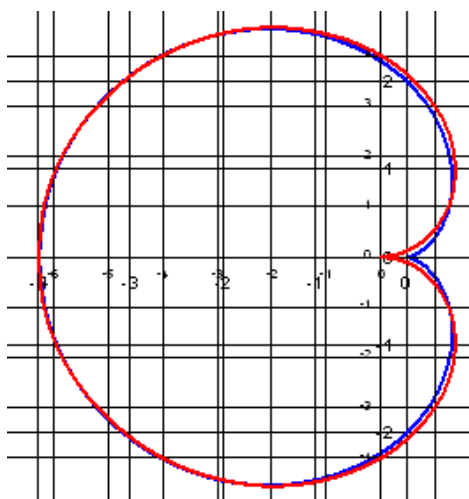


Рис. 10

Нижние индексы K и M в выражениях формул, взятых в (3) и выше говорят о принадлежности значений либо к Кардиоиде, либо к Мактоиде.

Итак, мы показали некоторое родство или, вернее сказать, похожесть кривых Мактоиды и Кардиоиды.

Многие из вас наверно знакомы или, по крайней мере, слышали о множестве Мандельброта. Один из самых известных фрактальных кристаллов множества Мандельброта имеет вид (см. например [3]):

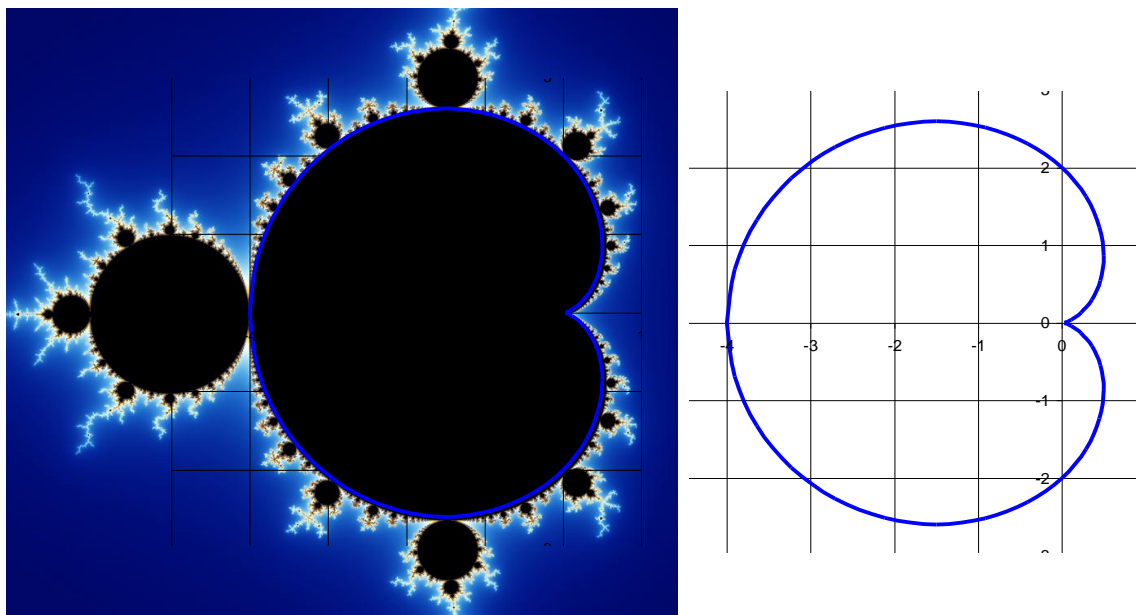


Рис. 11

Удивительно то, что главная часть этого кристалла имеет точную форму Кардиоиды [5]. Причём окружность, которую мы видим слева от главной части фигуры кристалла (Рис. 11, слева), равна окружности (единичного радиуса), которая описывает Кардиоиду. Множество Мандельброта порождается простой формулой на комплексной плоскости:

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + c, \quad (4)$$

здесь Z_{n+1} , Z_n , c – комплексные числа, описывающие переход от точки к точке на множестве Мандельброта. Формула (4) интересна нам только лишь внешним видом. Как перейти в формуле (4) от комплексных чисел к вещественным можно найти, например, в [4]. Нас будет интересовать похожая формула:

$$L_n = K_n^2 + c. \quad (5)$$

О величинах, которые входят в формулу (5) скажем чуть позже.

Т. о. мы начинаем знакомство с алгебраической структурой, которую назвали **упаковкой**. А формула (5) является основной формулой в теории упаковок [6]. По сути дела, формула (5) и является необходимым алгоритмом для создания упаковки. Существуют также и другие упаковки, и другие алгоритмы, но мы будем заниматься только одним видом упаковок.

Начнём с определений.

Определение 1: Замкнутым клеточным полем порядка K будем называть геометрическое кольцо, разделённое на K частей, каждая из которых имеет свой порядковый номер в соответствии с данным направлением обхода.

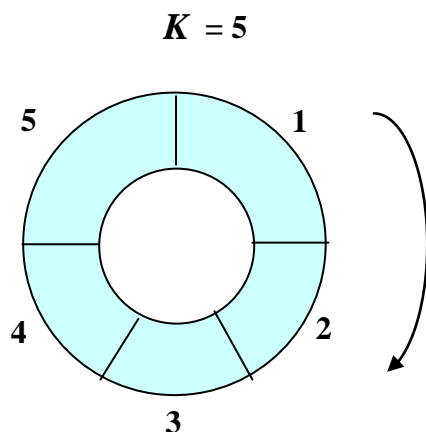
Пример 1

Рис. 12

Определение 2: Упаковкой порядка K будем называть замкнутое клеточное поле порядка K , каждая клетка которого содержит одно и только одно из чисел от 1 до K .

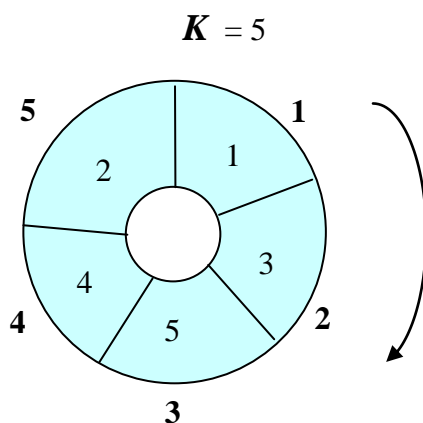
Пример 2 ($c = 2$)

Рис. 13

Определение 3: Алгоритмом заполнения упаковки порядка K будем называть функцию $L_n = K_n^2 + c$, где K_n пробегает значения от 1 до K , а $c \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, \infty\}$, причём для данной упаковки $c = \text{const}$ (в Примере 2 $c = 2$).

Определение 4: Расстоянием L_n будем называть число клеток упаковки, которое следует пропустить (в независимости от того, пуста она или уже заполнена) после числа K_n , следуя направлению обхода.

Пример 3: Для упаковки Примера 2 и алгоритма упаковки (5) при $K_n = 3$ и $c = 2$ будем иметь $L_3 = 11$. Это означает, что мы должны пропустить 11 клеток после клетки, где стоит число 3 , двигаясь по замкнутому полю в направлении обхода, и в следующей, после этого, клетке поставить число 4 (Рис. 13).

Заполнение упаковки начинается с числа 1 , которое можно поставить в любую клетку замкнутого поля.

Определение 5: Генератором поиска упаковок (ГПУ) будем называть компьютерную программу для поиска порядка упаковки в соответствии с данным алгоритмом упаковки.

Поиск упаковок проводился среди первых 10000 чисел натурального ряда для каждого $c = \{1, 2, \dots, 100\}$, по алгоритму (5).

Результаты работы ГПУ для данного алгоритма сведены в Таблицу 1. В столбцах « K » указаны только минимальные значения.

Таблица 1

c	K	c	K	c	K	c	K	c	K
1	23	21	263	41	503	61	743	81	983
2	5	22	5	42	5	62	5	82	5
3	47	23	41	43	17	63	59	83	53
4	59	24	23	44	11	64	41	84	1019
5	71	25	311	45	29	65	113	85	1031
6	83	26	17	46	563	66	11	86	149
7	5	27	5	47	5	67	5	87	5
8	107	28	347	48	587	68	827	88	11
9	17	29	359	49	599	69	839	89	83
10	131	30	53	50	47	70	23	90	1091
11	11	31	383	51	89	71	863	91	1103
12	5	32	5	52	5	72	5	92	5
13	167	33	11	53	647	73	887	93	23
14	179	34	419	54	659	74	29	94	17
15	191	35	431	55	11	75	911	95	1151
16	29	36	443	56	683	76	71	96	1163
17	5	37	5	57	5	77	5	97	5
18	227	38	467	58	101	78	947	98	1187
19	239	39	479	59	719	79	137	99	11
20	251	40	491	60	17	80	971	100	173

Глядя на Таблицу 1 можно сформулировать следующую

Гипотезу:

Для любого c и алгоритма упаковки (5) всегда существует упаковка минимального порядка K , причём K – простое число.

Кроме того, число $K \equiv 5 \pmod{6}$.

Следуя этой гипотезе мы получаем возможность изучать простые числа вида K в качестве упаковки этого порядка.

Введём обозначения для упаковок. Упаковку порядка $K = 17$, например, будем обозначать: $U_{17}(1)$. Число 1 в скобках обозначает, что число 1 находится в ячейке с номером 1. Если имеем упаковку $U_{17}(6)$, то это означает, что число 1 стоит в ячейке с номером 6. Очевидно, что упаковок порядка K существует ровно K штук. В зависимости от начального местоположения числа 1.

Рассмотрим простейшие упаковки этого алгоритма заполнения. Задача сводится к тому, чтобы найти закономерности, связанные с периодом упаковок K .

Можно вычислить местонахождение N_n числа n в упаковке $U_K(\mathbf{1})$. Для этого, зная уравнение алгоритма (5), не сложно вывести формулу:

$$P_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + 7n}{6} + c(n-1). \quad (6)$$

Откуда местонахождение N_n числа n в упаковке получаем из выражения:

$$N_n \equiv P_n \pmod{K}. \quad (7)$$

Формулы (6) и (7) можно объединить одним выражением:

$$N_n \equiv \left(n \frac{2n^2 - 3n + 7}{6} + c(n-1) \right) \pmod{K}, \quad (8)$$

здесь $N_n \leq K$.

Пример 4: пусть имеем упаковку $U_{17}(\mathbf{1})$. Требуется определить в какой ячейке будет стоять число $\mathbf{11}$ при заполнении упаковки по алгоритму (5).

$$P_{11} = \frac{2 \cdot 11^3 - 3 \cdot 11^2 + 7 \cdot 11}{6} + 9(11-1) = 486, \quad N_{11} = 10 \equiv 486 \pmod{17}.$$

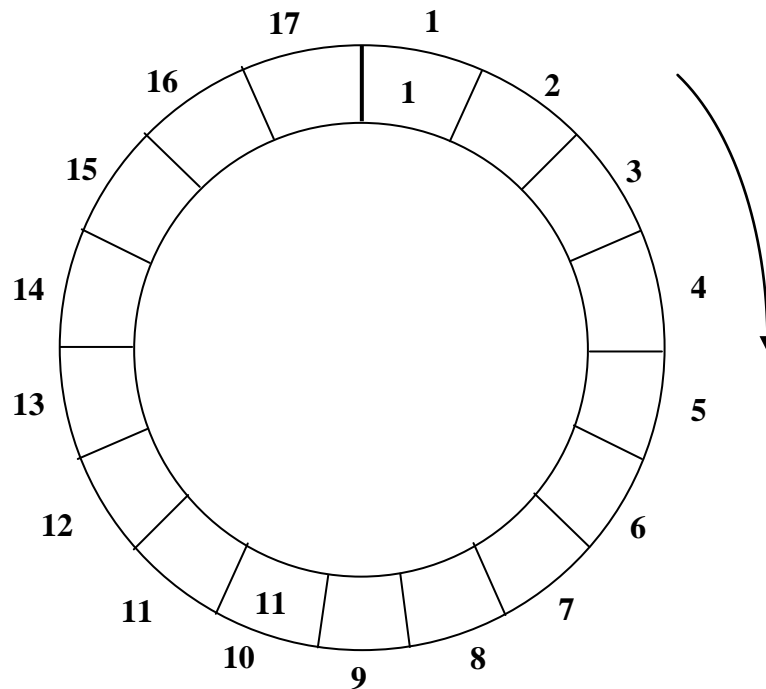


Рис. 14

Т. о. формулы (6), (7) позволяют определять местонахождение чисел в упаковке $U_K(\mathbf{1})$ минуя применение алгоритма (5).

Познакомимся с простейшими свойствами упаковок.

Свойство 1.

Всякая упаковка обладает осью симметрии.

Пример 5.

Дана упаковка $U_{11}(\mathbf{2})$.

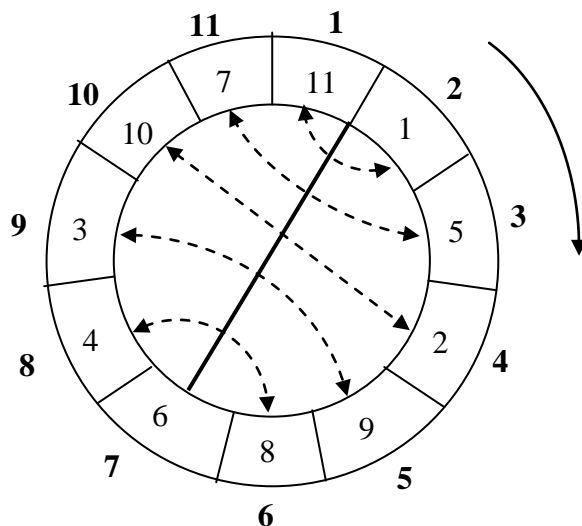


Рис. 15

Число $\mathbf{1}$ находится в клетке под номером $\mathbf{2}$, $K = \mathbf{11}$ (дано). Ось симметрии упаковки проходит через центр упаковки и клетку, где стоит число $\frac{K+1}{2} = \mathbf{6}$ (жирная чёрная прямая). Сумма чисел, стоящих в симметричных клетках равна $K+1$ (связи симметричных клеток показаны пунктирными линиями).

Из Таблицы $\mathbf{1}$ находим: $c = \mathbf{11}$. Т. е. имеем такой алгоритм заполнения: $L_n = K_n^2 + \mathbf{11}$. Надо отметить такую особенность. Если число $c \geq K$, то можно записать такое сравнение $c \equiv c_K \pmod{K}$ и число c_K использовать вместо числа c в алгоритме заполнения: $L_n = K_n^2 + c_K$. Тогда в нашем случае $c_K = \mathbf{0}$.

Зная свойство $\mathbf{1}$, достаточно заполнять упаковку только наполовину (до числа $\frac{K+1}{2}$ включительно), а остальные числа получают своё местонахождение согласно симметричному свойству.

Надо отметить ещё и такую особенность упаковок. Если алгоритм заполнения применить к числу K (последнему числу в упаковке), то пропустив $L_K = K^2 + c$ клеток находим клетку, где должно стоять число $\mathbf{1}$ (с которого начиналось заполнение упаковки). Т. е. алгоритм заполнения (5) обладает свойством цикличности.

Прежде чем перейти ко второму свойству упаковок введём понятие, которое будем называть графом упаковки.

Упаковка – это конечный объект. Она содержит в себе два подобных ряда, отличающихся друг от друга только последовательностью расположения в них чисел. Каждому числу упаковки будем сопоставлять точку графа. А ребру графа будем

сопоставлять отрезок (или дугу окружности), который связывает точку (число) и точку (число - местонахождение исходного числа). Например, если число **1** находится в ячейке **3**, а число **3** стоит в клетке **1**, то это будет графически выглядеть таким образом:

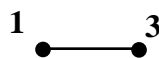


Рис. 16

Если число n находится в клетке с номером n , то на графе это будет выглядеть так:

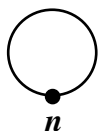


Рис. 17

Построим граф для упаковки Примера 5.

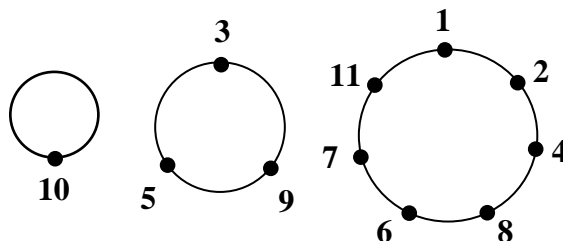


Рис. 18

Очевидно, что граф упаковки всегда будет представлять собой цикл или несколько циклов. Для графов примем обозначение: $G_K(n) = (\dots)$. Например, граф Рис. 18 будет иметь такое обозначение: $G_{11}(2) = (1, 3, 7)$. Числа в скобках справа от знака равенства обозначают, что граф состоит из трёх циклов порядка **1**, **3** и **7**. Первый цикл – это всего одна точка (т. к. число **10** находится в ячейке **10**). Второй цикл – это три точки, т. к. число **3** стоит в **9**-ой ячейке, число **9** стоит на **5**-ом месте, а число **5** стоит в ячейке с номером **3** (Рис. 15) – цикл замкнулся. Аналогично получаем и цикл из семи чисел. Можем записать: $U_{11}(2) \rightarrow G_{11}(2) = (1, 3, 7)$. Правую скобку можно расписать подробно $(1, 3, 7) = \{(10)(3, 9, 5)(1, 2, 4, 8, 6, 7, 11)\}$.

Очевидно также, что число графов равно числу упаковок и равно порядку K упаковки.

Два графа будем называть изоморфными если они имеют одинаковое представление в правой скобке записи графа. Обозначать это будем так: $G_K(n) \equiv G_K(m)$.

Теперь можем сформулировать второе свойство упаковок.

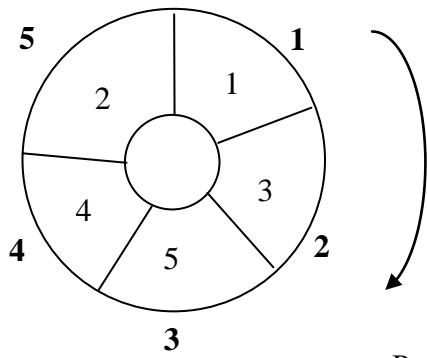
Свойство 2.

Среди всех графов упаковки порядка K как минимум один граф не имеет себе изоморфного.

Пример 6.

Рассмотрим самые маленькие упаковки данного алгоритма заполнения. Это упаковки $U_5(k_i)$, т. е. порядок равен 5-ти. И построим все графы данных упаковок.

$U_5(1)$



$G_5(1) = (1,1,3)$

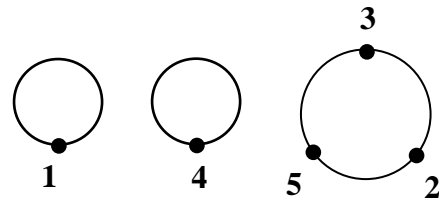
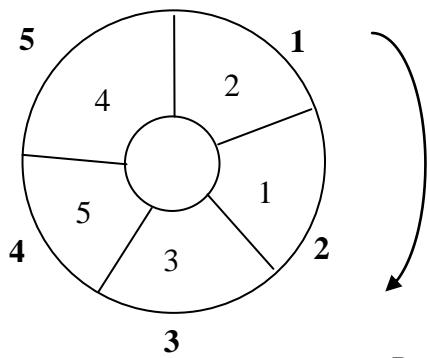


Рис. 19

$U_5(2)$



$G_5(2) = (1,2,2)$

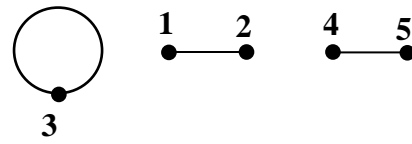
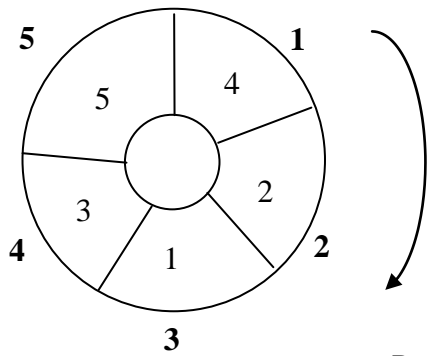


Рис. 20

$U_5(3)$



$G_5(3) = (1,1,3)$

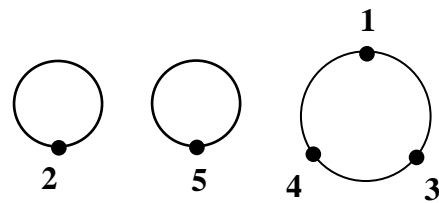
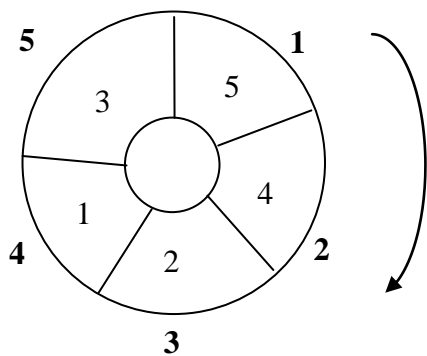


Рис. 21

$U_5(4)$



$G_5(4) = (5)$

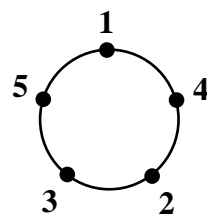


Рис. 22

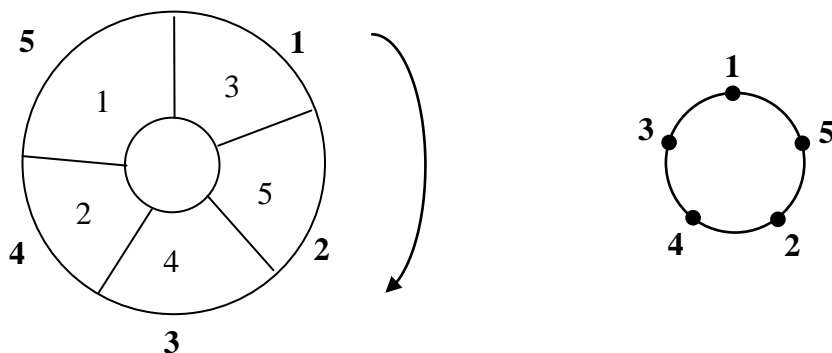
$U_5(5)$ $G_5(5) = (5)$ 

Рис. 23

Глядя на Рис.19 – 23, можем записать: $G_5(1) \equiv G_5(3) = (1,1,3)$, $G_5(4) \equiv G_5(5) = (5)$.
Граф $G_5(2) = (1,2,2)$ не изоморфен никакому другому.

Пример 7.

Выпишем все графы упаковок порядка $K = 11$.

$$G_{11}(2) \equiv G_{11}(11) = (1,3,7); \quad G_{11}(3) \equiv G_{11}(10) = (11); \quad G_{11}(4) \equiv G_{11}(9) = (1,1,2,3,4);$$

$$G_{11}(5) \equiv G_{11}(8) = (2,2,7); \quad G_{11}(6) \equiv G_{11}(7) = (1,4,6); \quad G_{11}(1) = (1,1,1,4,4).$$

Как видим, все кроме одного графа (это граф $G_{11}(1)$) попарно изоморфны.

Наберёмся терпения и выпишем все графы для упаковок порядка $K = 17$ и $K = 23$.

$$G_{17}(1) \equiv G_{17}(10) = (1,6,10); \quad G_{17}(2) \equiv G_{17}(9) = (1,1,2,4,9); \quad G_{17}(3) \equiv G_{17}(8) = (1,1,1,5,9);$$

$$G_{17}(4) \equiv G_{17}(7) = (3,5,9); \quad G_{17}(5) \equiv G_{17}(6) = (2,3,12); \quad G_{17}(11) \equiv G_{17}(17) = (1,3,13);$$

$$G_{17}(12) \equiv G_{17}(16) = (1,4,12); \quad G_{17}(13) \equiv G_{17}(15) = (2,2,13); \quad G_{17}(14) = (1,8,8).$$

В этой группе графов также все попарно изоморфные кроме одного.

$$G_{23}(1) \equiv G_{23}(2) = (1,5,17); \quad G_{23}(3) \equiv G_{23}(23) = (2,4,17); \quad G_{23}(4) \equiv G_{23}(22) = (1,2,5,5,10);$$

$$G_{23}(5) \equiv G_{23}(21) = (2,4,4,5,8); \quad G_{23}(6) \equiv G_{23}(20) = (1,1,5,5,11);$$

$$G_{23}(7) \equiv G_{23}(19) = (1,1,1,4,16); \quad G_{23}(8) \equiv G_{23}(18) = (2,3,3,4,11);$$

$$G_{23}(9) \equiv G_{23}(17) = (1,3,3,6,10); \quad G_{23}(10) \equiv G_{23}(16) = (1,9,13);$$

$$G_{23}(11) \equiv G_{23}(15) = (1,2,2,3,15); \quad G_{23}(12) \equiv G_{23}(14) = (5,6,12); \quad G_{23}(13) = (1,1,1,5,5,5,5)$$

Аналогичную картину наблюдаем и в последней группе, граф $G_{23}(13)$ не имеет пары.

Не сложно заметить такое свойство. Рассмотрим изоморфные графы $G_K(n) \cong G_K(m)$. Введём обозначения: $n + m = s$ или $n + m = t$ (сумма этих значений почти всегда имеет две различных константы). Тогда

Свойство 3. (для изоморфных графов).

Если $G_K(n) \cong G_K(m)$, то $s \equiv t \pmod{K}$.

Действительно, $9 \equiv 4 \pmod{5}$, $13 \equiv 13 \pmod{11}$, $28 \equiv 11 \pmod{17}$, $26 \equiv 3 \pmod{23}$.

Если понять как возникают значения s , t и p , то можно было бы говорить о формуле, которая всегда даёт простые числа: $K = \frac{s-t}{p}$. Разумеется здесь s , t и p – целые числа.

Напомним, что для $K = 5$, $c = 2$; для $K = 11$, $c = 11$ (или $c = 0$); для $K = 17$, $c = 9$; для $K = 23$, $c = 1$ и т. д. (см. Таблицу 1).

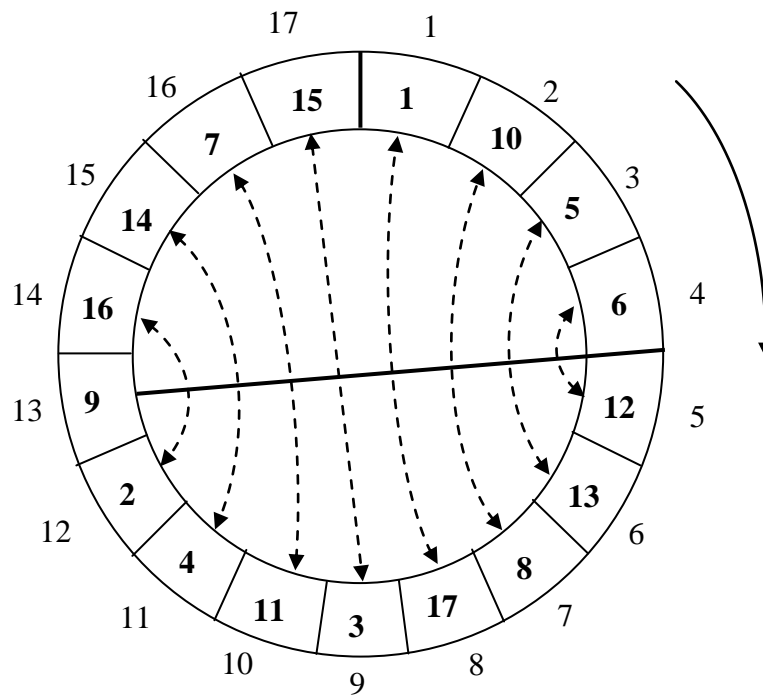


Рис. 24

В заключение можем предположить, что для простых чисел $K \equiv 1 \pmod{6}$ справедлив алгоритм заполнения $L_n = K_n^4 + c$. Автору известно, по крайней мере, что этот алгоритм справедлив для чисел **7** и **103**.

Мы надеемся что теория упаковок найдёт заинтересованного исследователя и поможет пролить свет на тайны простых чисел.

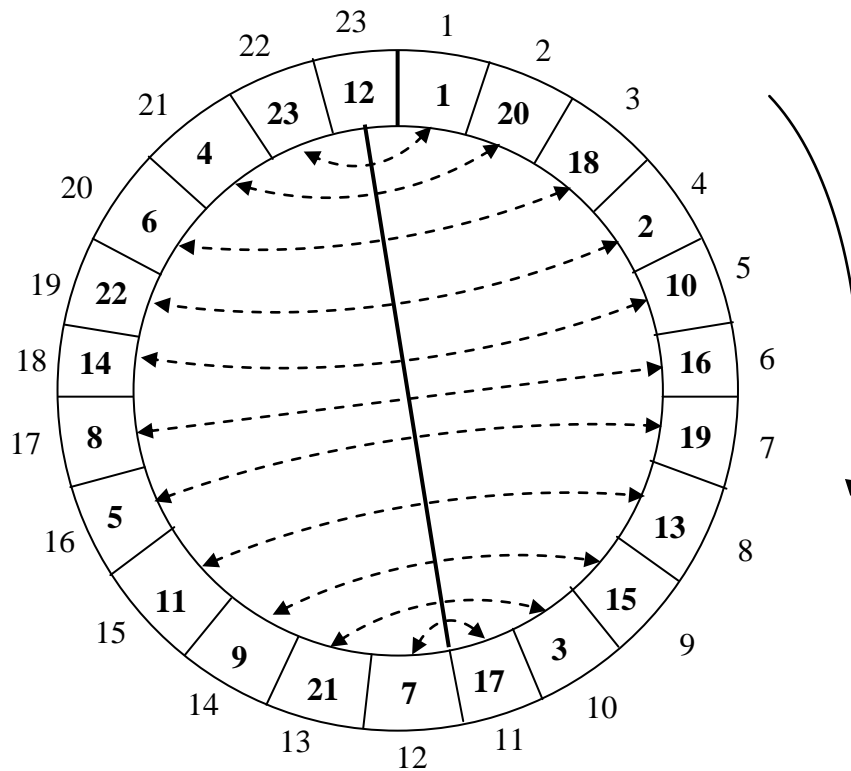


Рис. 25

Литература.

1. М. Гарднер, «Математические досуги», М. «Мир», 1972.
2. А. А. Гусак, Г. М. Гусак, «Линии и поверхности», Минск, «Высшая школа», 1985
3. Г. Шустер, «Детерминированный хаос», М, «Мир», 1988.
4. В. В. Коваленко, «Частично инфинитное моделирование», Ст.-П., «Политехника, 2005
5. О. Е. Акимов, «Дискретная математика», www.bookre.org
6. Ф. Герман, «Математика тонкого мира», www.franz-hermann.com