Франц Герман

Формула определителя
(www.franz-hermann.com)

Рассмотрим определитель n - го порядка, инвертированный по отношению к единичному. Докажем, что такой определитель вычисляется по формуле:

$$\Delta^n = (n-1)\cdot(-1)^{(n-1)} \tag{1}$$

Мы думаем, что почти наверняка читатель этого не знает. Однако, мы предполагаем, что читатель уже знаком с определителями второго порядка из курса решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Определитель n - го порядка мы будем обозначать значком «Δ^n». Сверху стоит индекс, определяющий порядок определителя, т. е. число его строк (либо число его столбцов).

А теперь напомним читателю, что такое определитель и расшифруем слово «инвертированный».

Эта заметка может быть для читателя небольшим экскурсом в теорию определителей.

Итак, мы предположили, что читатель знаком с определителем второго порядка:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Определитель – это алгебраическая структура, состоящая из n^2 элементов, если порядок определителя равен n. Т. е. определитель n–го порядка будет иметь n строк и n столбцов:

$$\Delta^n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Каждый определитель является носителем некоторого числа, которое называется значением определителя. Определитель второго порядка вычисляется по формуле:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2}$$

Определитель третьего порядка вычисляется по такой формуле:

$$\Delta^3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \tag{3}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Покажем, как получается формула (3) при помощи формулы (2).

Всякий определитель можно разложить на сумму определителей меньшего порядка. Покажем, как это делается на примере определителя Δ^3.

$$\Delta^3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Мы взяли элементы первой строки a_{11}, a_{12}, a_{13}. Причём знаки этих элементов должны чередоваться. Плюс ставится если сумма индексов $i+j$ – чётная и минус – если сумма индексов нечётная. Взяв элемент a_{11} мы вычеркнули из определителя Δ^3 строку и столбец, на пересечении которых стоит элемент a_{11}. Внутри определителя Δ^3 остались элементы, образующие определитель второго порядка, т. е. определитель $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Для элемента a_{12} получим определитель $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, а для элемента a_{13} - определитель $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$. Эти определители мы уже умеем вычислять. Вычислим выражение (4).

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Получили формулу (3).

Разложить определитель можно по элементам любого столбца и любой строки. Т. о. любой определитель можно постепенно свести к сумме определителей третьего порядка и потом воспользоваться формулой (3) для его вычисления.

Пример: Вычислить определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 3 + 4\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 - 4\cdot 3\cdot 3 = 24$$

Мы вычислили определитель по формуле (3). Теперь вычислим определитель, разложив его по элементам второго столбца.

$$\Delta = -4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4\cdot(3\cdot 3 - 2\cdot 1) + \cdot 1\cdot(1\cdot 3 - 2\cdot 2) - 1\cdot(1\cdot 1 - 2\cdot 3) = 24$$

Теперь познакомимся с тремя свойствами определителей.

Свойство 1.

Чтобы умножить определитель на число, надо каждый из элементов какого-нибудь одного столбца или какой-нибудь одной строки умножить на это число.

Свойства 2.

Два определителя можно сложить, если они отличаются друг от друга только элементами одной строки или одного столбца (разумеется, определители должны быть одного порядка). При этом складываются соответствующие элементы только тех различных строк (столбцов), а все остальные строки (столбцы) остаются без изменения.

Свойство 3.

Если два столбца или две строки некоторого определителя поменять местами, то знак его измениться на противоположный.

Предлагаем читателю самому доказать эти свойства определителей.

Продолжим знакомство с определителями.

Элементы a_{11}, a_{22}, , a_{nn} называются главной диагональю определителя. Если элементы главной диагонали определителя все равны **1**, а все остальные элементы определителя равны **0**, то такой определитель называется единичным. Очевидно, что значение единичного определителя всегда равно **1**.

Теперь поясним, что означает слово «инвертированный». Как уже говорили ранее, термин этот взят из области вычислительной техники. Наверно, читателю известно, что всякий компьютер работает с числами двоичной системы счисления. Т. е. это числа, которые имеют в своих разрядах только нули и единицы. Операция инвертирования меняет в данном двоичном числе нули на единицы и единицы на нули.

Мы думаем, что теперь читателю стало ясно, что означают слова «определитель, инвертированный по отношению к единичному».

Пример:

$\Delta^4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ - единичный определитель четвёртого порядка. $\Delta_1^4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ - определитель, инвертированный по отношению к данному.

Теперь приступим к доказательству формулы (1).

Покажем справедливость формулы (1) на некоторых частных случаях.

При $n = 1$, наш определитель становится числом $\Delta^1 = 0$, что, в данном случае, не противоречит формуле (1) при $n = 1$.

При $n=2$, имеем: $\Delta^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$. По формуле (1): $(n-1)\cdot(-1)^{(n-1)} = (2-1)\cdot(-1)^{2-1} = -1$.

При $n = 3$, получаем:

$$\Delta^3 = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \mathbf{2}$$

По формуле (1): $(\mathbf{3}-\mathbf{1})\cdot(-\mathbf{1})^{\mathbf{3}-\mathbf{1}} = \mathbf{2}$.

Как видим, для начальных значений ***n*** формула (1) справедлива. Но мы не можем перебрать все значения *n*. Как же поступают в этом случае?

Для подобных случаев существует метод доказательства, который называется «методом математической индукции».

Для тех, кто не знаком с этим методом, мы расскажем на примере, в чём здесь суть. Доказательство правомерности использования этого метода не входит в нашу задачу, но суть самого метода такова.

Если некоторое утверждение справедливо для ***n* = 1**, то мы делаем предположение, что это утверждение справедливо и для ***n* = *k***. И уже, исходя из этого предположения, пытаемся доказать, что наше утверждение справедливо и для случая ***n* = *k*+1**. Если нам это удаётся, то значит наше утверждение справедливо для любого натурального ***n***.

Пример:

Докажем справедливость формулы $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1+n}{2}n$ для вычисления суммы первых ***n*** чисел натурального ряда.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{1+n}{2}n$$

Не трудно проверить, что формула выполняется при начальных значениях ***n***. Предположим, данная формула справедлива для ***n* = *k***. Докажем, что она справедлива и для ***n* = *k*+1**. Подставим ***n* = *k*+1** в формулу.

$$\frac{1+(k+1)}{2}\cdot(k+1) = \frac{(k+2)\cdot(k+1)}{2} = \frac{(k+1)}{2}k + (k+1) = \sum_{k=1}^{n=k} k + (k+1),$$

т. к. мы предположили, что формула для ***n* = *k*** верна. Отсюда:

$$\sum_{k=1}^{k=n} k + (k+1) = \underbrace{1+2+\ldots+k}_{\sum_{k=1}^{n} k} + (k+1) = \sum_{k=1}^{n=k+1} k = \frac{1+n}{2}n.$$

Т. о. формула верна для любого натурального ***n***.

Вернёмся к нашей задаче.

Итак, мы убедились, в справедливости формулы (1) при начальных значениях ***n***. Предположим, что формула (1) верна и для определителя порядка ***n* = *k***. Т. е.

$$\Delta^k = (k-1)\cdot(-1)^{(k-1)}$$

Покажем сначала, что определитель Δ^{k+1} можно привести к такому виду:

$$\Delta^{k+1} = -k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = -k \cdot \Delta_1^k \qquad (5)$$

Чтобы понять, как это можно сделать, рассмотрим какой-нибудь конкретный определитель, например, пятого порядка. Разложим этот определитель по элементам первого столбца.

$$\Delta^5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Элемент a_{11} равен нулю, потому и получаем четыре таких определителя. Заметим, что первый и второй определители отличаются тем, что у второго поменялись местами первый и второй столбец. Поменяв местами эти столбцы и поставив знак «-» перед вторым определителем, получаем два одинаковых определителя. В третьем определителе сначала надо поменять местами третий и второй столбцы, а затем – второй и третий. Т. к. мы сделали две перемены мест, то знак перед определителем не изменится. В последнем определителе надо провести три перемены мест столбцов, начиная с последнего столбца. Получаем четыре одинаковых определителя. Очевидно, что такие рассуждения можно провести и для определителя любого другого порядка, т. е. определитель Δ^{k+1} всегда можно привести к виду (5).

Рассмотрим определитель Δ_2^k такого вида:

$$\Delta_2^k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix};$$

Элементы первого столбца кроме a_{11} все равны нулю. Заметим, что Δ^k и Δ_2^k отличаются только первыми столбцами (помним, что Δ^k - это инвертированный, по отношению к единичному, определитель k – го порядка).

Можем (в силу следствия 2) сложить Δ^k и Δ_2^k, тогда получим:

$$\Delta^k + \Delta_2^k = \Delta_1^k \text{ или } \qquad \Delta^{k+1} = -k \cdot \left(\Delta^k + \Delta_2^k\right) \qquad (6)$$

Вычислим значение определителя Δ_2^k. Разложим его по элементам первого столбца. Все они кроме a_{11} равны нулю. Поэтому можем записать:

$$\Delta_2^k = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \Delta^{k-1} = (k-2) \cdot (-1)^{(k-2)}$$

По предположению $\Delta^k = (k-1) \cdot (-1)^{(k-1)}$. Подставим последние выражения в (6).

$$\Delta^{k+1} = -k \cdot \left((k-1) \cdot (-1)^{k-1} + (k-2) \cdot (-1)^{k-2}\right) = -k \cdot (-1)^{k-1}\left(k - 1 + (k-2) \cdot (-1)^{-1}\right) =$$

$$= -k \cdot (-1)^{k-1}(k - 1 - k + 2) = (-k) \cdot (-1)^{k-1} = k \cdot (-1)^{-1}(-1)^{k-1} = k \cdot (-1)^k$$

Т. о. получили опять формулу (1). Следовательно, в силу метода математической индукции, формула (1) будет справедлива для любого n.

Что и требовалось доказать.

Предлагаем читателю провести исследование, как меняет знак определитель Δ^n при повороте его на **90°**, **180°**, **270°**. И попытаться обобщить своё исследование на определители n-го порядка любого вида. Можем добавить к этому, что провести такое исследование читателю поможет хотя бы первое знакомство с теорией алгебраических подстановок. Для этого не потребуется никаких дополнительных знаний и найти изложение этой теории можно почти в любом учебнике по высшей алгебре.