

## Франц Герман

### Полиэдры. Графы. Развёртки.

( [www.franz-hermann.com](http://www.franz-hermann.com) )

*Остовы полиэдров изоморфны графам, то есть множествам точек (вершин), соединённых линиями (рёбрами).*

Мартин Гарднер

Теория графов - это один из разделов высшей математики. Изучают его в высших математических и технических учебных заведениях. Однако, первые понятия теории графов достаточно просты и не требуют специальной математической подготовки. Кроме этого теория графов очень наглядна и красива и, используя её методы, можно облегчить себе путь к решению некоторых задач. Мы уже познакомили читателя с орграфами при помощи которых удобно отыскивать различные упаковки чисел на замкнутых клеточных полях (см. работу «Магические колёса или упаковки клеточных полей»).

В данной работе мы покажем, как при помощи графов можно исследовать различные полиэдры (многогранники) и их развёртки.

Можно рассматривать данную главу и как элементарное введение в теорию планарных графов. От читателя не требуется никаких дополнительных знаний.

Как и всякая новая теория, теория графов начинается с ввода основных определений.

Определение 1.

Графом называется непустое множество  $G$ , состоящее из  $V$  вершин и заданного неупорядоченного множества  $P_{ij}$  пар вершин  $\{V_i, V_j\}$ , называемых рёбрами.

Пример:

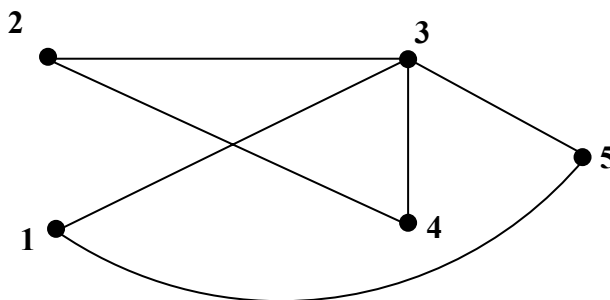


Рис. 1

На Рис.1 показан граф, имеющий пять вершин, обозначенных числами 1, 2, 3, 4, 5 и шесть рёбер  $\{1,3\}$ ,  $\{1,5\}$ ,  $\{2,3\}$ ,  $\{2,4\}$ ,  $\{3,4\}$ ,  $\{3,5\}$ . Каждая пара вершин, определяющих ребро, называется неупорядоченной, т.к. для нас в данный момент не имеет значения как записать  $\{3,5\}$  или  $\{5,3\}$ . Ясно, что это ребро, которое соединяет вершины 3 и 5. В главе 3 речь шла об орграфах (ориентируемые графы). В таких графах каждое ребро снабжено стрелочкой, т.е. в этом случае мы говорили бы уже об упорядоченной паре вершин.

Определение 2.

Петлёй называется ребро, начало и конец которого принадлежат одной вершине, т.е.  $P_{ii} = \{B_i, B_i\}$ .

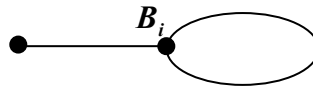


Рис. 2

Определение 3.

Рёбра называются кратными, если они соединяют одни и те же вершины.

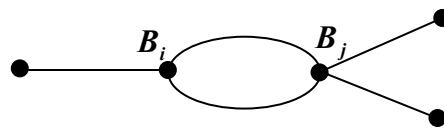


Рис.3

Вершины  $B_i$  и  $B_j$  соединены кратными рёбрами. Число кратности равно 2, по числу рёбер.

Определение 4

Степенью вершины называется число инцидентных (присоединённых, входящих) ей рёбер и обозначается  $\deg B_i$ . Для графа, показанного на Рис.1, имеем:  $\deg 1=2$ ,  $\deg 2=2$ ,  $\deg 3=4$ ,  $\deg 4=2$ ,  $\deg 2=2$ .

**Лемма «о рукопожатиях».**

Сумма степеней всех вершин графа - чётное число, равное удвоенному числу рёбер.

$$\sum \deg B_i = 2P. \quad (1)$$

Доказательство леммы очевидно. Действительно, каждое ребро соединяет строго 2 вершины, т.е. даёт вклад в сумму степеней вершин равный 2. Если наш граф имеет  $P$  рёбер, то сразу получаем, что сумма степеней вершин равна  $2P$ , т.е. формулу (1).

Определение 5.

Плоским графом называется граф, вершины которого являются точками плоскости, а рёбра - непрерывными плоскими линиями без самопересечений.

Во всех предыдущих примерах все графы, показанные на Рис. 1, 2, 3, являются плоскими.

Определение 6.

Любой граф, изоморфный плоскому графу, называется планарным. Что значит изоморфные графы. Это графы, которые имеют одинаковое число вершин и одинаковое число рёбер, причём для вершин графов, можно ввести одинаковые обозначения таким образом, что неупорядоченные пары вершин, обозначающие рёбра, у изоморфных графов будут одинаковы. На Рис.4 показан граф, изоморфный графу Рис.1.

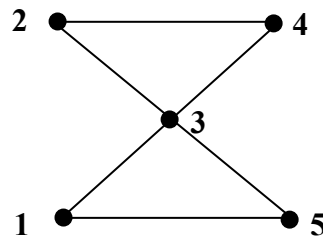


Рис. 4

Определение 7.

Планарный граф, не имеющий петель и кратных рёбер, степени вершин которого  $\deg B_i \geq 3$ , и однозначно укладываемый на сфере, будем называть простым сферическим графом.

Известна такая; **теорема:**

Всякий планарный граф можно уложить на сфере.

Доказательство этой теоремы выходит за рамки этой книги, поэтому мы его здесь не приводим.

Что значит «уложить на сфере». Это значит, что мы должны на поверхности сферы нарисовать граф, изоморфный данному.

Везде в дальнейшем речь будет идти только о простых сферических графах, поэтому слово «простой» иногда ниже будем опускать.

Из определения 7 ясно, что простой сферический граф, уложенный на сфере, можно рассматривать, как сферический полиэдр, грани которого являются частями данной сферы.

Не для всякого сферического полиэдра существует изоморфный ему многогранник, т.е. полиэдр с плоскими гранями. Мы столкнёмся с таким фактом в нашем исследовании. Обратное же утверждение всегда верно.

Приведём пример простейшего сферического графа.

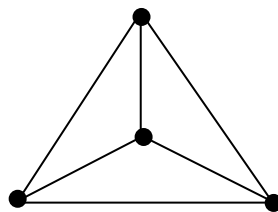


Рис. 5

Всякий плоский граф разбивает плоскость на области, называемые гранями.

Для сферического графа это очень наглядно можно представить, уложив его на сферу. (В качестве модели сферы очень удобно использовать пластмассовый шарик для настольного тенниса). Покажем, как это будет выглядеть в случае нашего простейшего сферического графа (Рис.6).

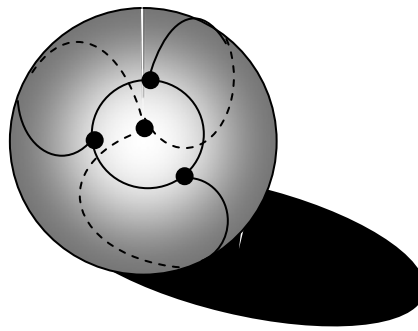


Рис. 6

Как видим, из Рис.6, простейший сферический граф разбивает поверхность сферы на 4 области, т.е. будем говорить, что данный граф имеет 4 грани (будем обозначать это –  $\Gamma = 4$ ).

Граф, показанный на Рис.5 также разбивает плоскость на 4 части (три треугольника и внешняя часть).

Заметим, что простейший сферический граф, уложенный на сфере, изоморфен простейшему полиэдру - тетраэдру.

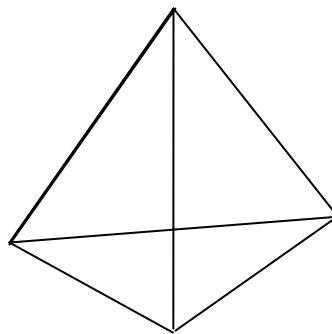


Рис.7

В дальнейшем нам понадобится также теорема Эйлера. Доказательство теоремы Эйлера мы здесь не приводим.

**Теорема Эйлера:**

Для всякого полиэдра верно равенство:

$$B + \Gamma - P = 2. \quad (2)$$

Следствие:

Для всякого сферического графа справедливо неравенство:

$$P \leq 3B - 6. \quad (3)$$

Доказательство:

Каждая грань сферического графа ограничена, по крайней мере, тремя рёбрами. С другой стороны, каждое ребро принадлежит двум граням. Поэтому:  $3\Gamma \leq 2P$ . Подставим это неравенство в (2), получим:

$$P = B + \Gamma - 2 \leq B + \frac{2}{3}P - 2$$

или

$$P \leq 3B - 6.$$

Покажем примеры простых сферических графов, для которых  $P \leq 12$ . Мы ограничились здесь этим значением  $P$ , т.к. точно известно, что в этих пределах планарные графы однозначно укладываются на сферу, а при  $P > 12$  уже появляются графы, для которых эта однозначность не сохраняется.

Из определения сферического графа заключаем, что

$$\sum \deg B_i \geq 3B.$$

Но из (3) имеем  $3B \geq P + 6$ . Кроме этого известно, что  $\sum \deg B_i = 2P$ . Поэтому получаем такое характеристическое неравенство:

$$2P \geq 3B \geq P + 6 \quad (4)$$

и

$$P \geq 6.$$

Кроме этого введём ещё один критерий поиска в виде неравенства:

$$\max(\deg B_i) \leq B - 1 \quad (5)$$

Действительно, в противном же случае неизбежны петли и кратные рёбра, что противоречит определению простого сферического графа.

Приступим к поиску графов. Т.е. зная  $P$  нам необходимо найти  $B$ ,  $\Gamma$  и  $\deg B_i$ . Зная все эти характеристики графа уже можно попытаться представить его наглядно.

Пусть  $P = 6$ , тогда из (4) получаем:

$$12 \geq 3B \geq 12, \text{ т. е. } B = 4.$$

По формуле Эйлера (2) находим, что  $\Gamma = 4$ . Это как раз и есть тот граф, который изображён на Рис. 99. Для этого графа  $\deg B_i = 3$ , что не противоречит критерию (5).

Существует ли сферический граф с числом рёбер  $P = 7$ ? Из (4) заключаем, что должно быть справедливо неравенство:

$$14 \geq 3B \geq 13.$$

Но этого не может быть ни при каких целых  $B$ . Следовательно, сферического графа с числом рёбер  $P = 7$  не существует. Следовательно не существует и многогранника с числом рёбер  $P = 7$ .

При  $P = 8$  получаем такое характеристическое неравенство:

$$16 \geq 3B \geq 14, \text{ т. е. } B = 5.$$

По формуле (2) находим число граней:  $\Gamma = 8 + 2 - 5 = 5$ .

$$\sum \deg B_i = 2P = 16 = (3 + 3 + 3 + 3 + 4).$$

Т. о. получаем такой граф:

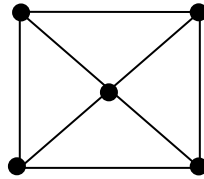


Рис. 8

Прежде, чем продолжить наши поиски, необходимо сделать одно уточнение. Мы ведём свои исследования только среди планарных графов и, потому, необходимо иметь критерий планарности графа. Одним из таких критериев является теорема Понтрягина – Куратовского:

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, изоморфных графам:

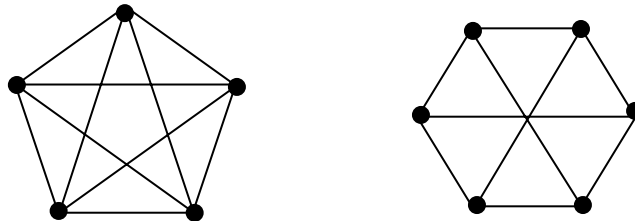


Рис. 9

Теперь продолжим наши исследования.

При  $P = 9$  имеем такое соотношение:  $18 \geq 3B \geq 15$ . Этому неравенству удовлетворяют два значения  $B$ :

При  $B = 5$  получаем:  $\Gamma = 9 + 2 - 5 = 6$  и  $\sum \deg B_i = 18 = (3 + 3 + 4 + 4 + 4)$ . Этим характеристикам отвечает такой граф:

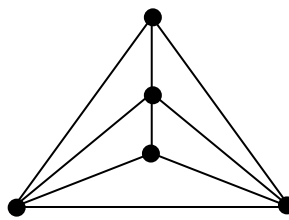


Рис. 10

Кроме этого,  $\sum \deg B_i = 18$  допускает ещё два разложения по степеням вершин:  $(3 + 3 + 3 + 4 + 5)$  и  $(3 + 3 + 3 + 3 + 6)$ , но оба эти разложения противоречат критерию (5).

При  $B = 6$  получаем:  $\Gamma = 9 + 2 - 5 = 5$  и единственное разложение по степеням вершин:  $\sum \deg B_i = 18 = (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3)$ .

Существуют два графа с такими характеристиками.

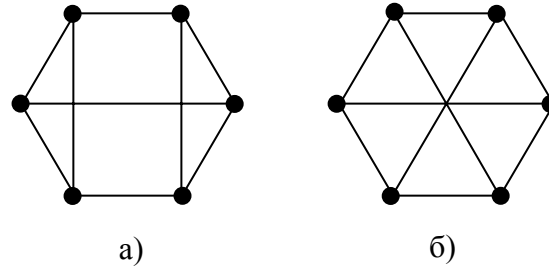


Рис. 11

Но замечаем, что граф б) Рис. 11 не отвечает критерию планарности и поэтому мы должны исключить его из нашего рассмотрения.

В дальнейшем не планарные графы мы мы приводить не будем, т. к. они не представляют для нас интереса.

При  $P = 10$  имеем такое характеристическое неравенство:  $20 \geq 3B \geq 16$ . Этому неравенству удовлетворяет значение  $B = 6$ :

$$Г = 10 + 2 - 6 = 6,$$

$$\sum \deg B_i = 20 = (3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4),$$

$$\sum \deg B_i = 20 = (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5).$$

Получаем такие графы:

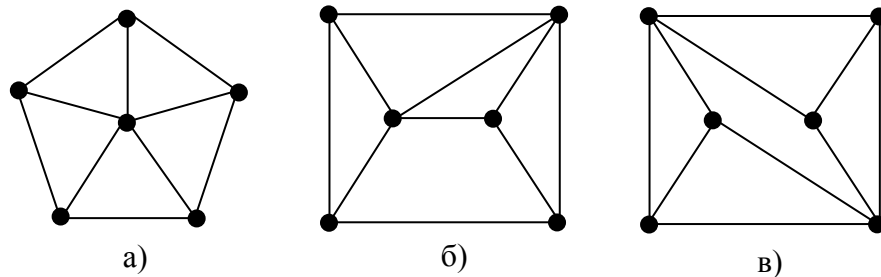


Рис.12

Обращаем внимание читателя на граф, изображённый на Рис.12 в). Для этого сферического графа не существует изоморфного полиэдра (многогранника). Почему? Так же заметим, что на Рис.12 б) и в) изображены графы, у которых число вершин, число рёбер, число граней, разложение по степеням вершин и состав граней (4 треугольника и 2 четырёхугольника) одинаковы. А между тем, топологически эти графы различны (не изоморфны). Это говорит о том, что граф должен иметь ещё какую-то характеристику, скрытую на первый взгляд. Одной из таких характеристик и является изоморфизм сферического графа многограннику.

При  $P = 11$  имеем:  $22 \geq 3B \geq 17$ .

Этому неравенству соответствуют два значения  $B$ :  $B = 6, B = 7$ .

При  $B = 6$ ,

$$Г = 11 + 2 - 6 = 7,$$

$$\sum \deg B_i = 22 = (3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4),$$

$$\sum \deg B_i = 22 = (3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5),$$

$$\sum \deg B_i = 22 = (3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 5).$$

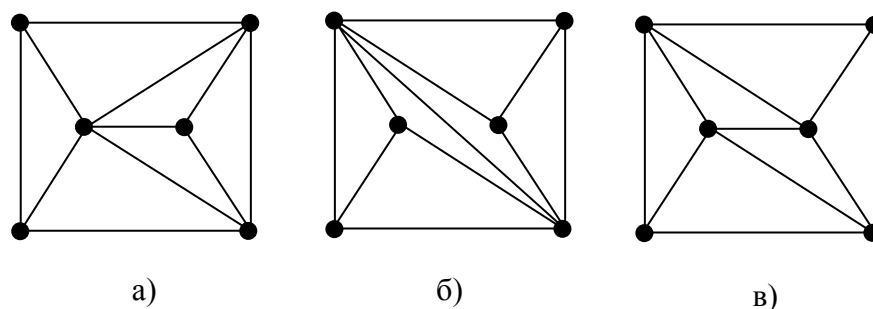


Рис. 13

При  $B = 7$ ,

$$\Gamma = 11 + 2 - 7 = 6,$$

$$\sum \deg B_i = 22 = (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4).$$

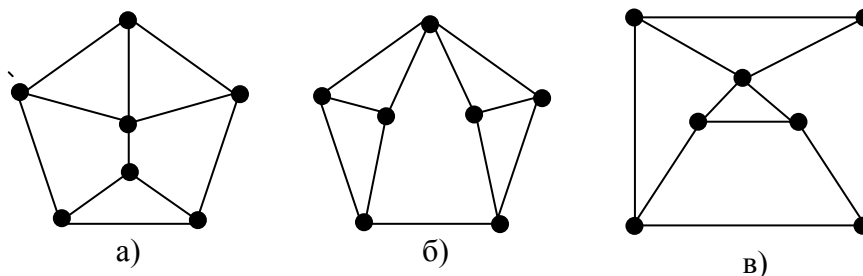


Рис. 14

На Рис.14 б) показан граф, для которого так же не существует изоморфного многогранника. Если читатель разобрался с первым случаем, то и здесь понять почему так происходит для него не составит труда.

Ну и приступим к поиску последних сферических графов, которые мы наметили к исследованию.

При  $P = 12$ , получаем неравенство:  $24 \geq 3B \geq 18$

Имеем три значения  $B$ , удовлетворяющие этому неравенству:  $B = 8$ ,  $B = 7$ ,  $B = 6$ .  
 При  $B = 8$ ,  $\Gamma = 12 + 2 - 8 = 6$ .

$$\sum \deg B_i = 24 = (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3).$$



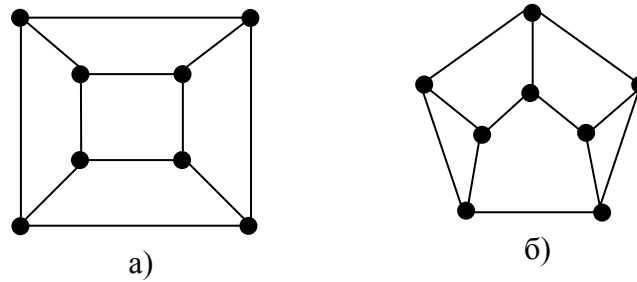


Рис. 15

При  $B = 6, \Gamma = 12 + 2 - 6 = 8$ .

- 1)  $\sum \deg B_i = 24 = (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4)$ ,
- 2)  $\sum \deg B_i = 24 = (3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 5)$ ,
- 3)  $\sum \deg B_i = 24 = (3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5)$ ,
- 4)  $\sum \deg B_i = 24 = (3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5)$ .

Сразу отметила, что сферических графов с разложением по степеням вершин типа 2) и 4) не существует. Позже мы ещё вернёмся к этому вопросу. Остаются такие графы:

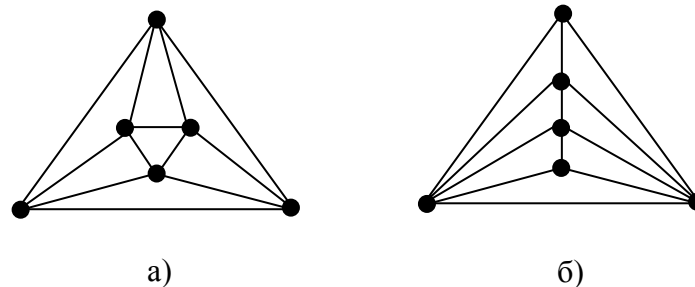


Рис. 16

При  $B = 7, \Gamma = 12 + 2 - 7 = 7$ .

- 1)  $\sum \deg B_i = 24 = (3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4)$ ,
- 2)  $\sum \deg B_i = 24 = (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 5)$ ,
- 3)  $\sum \deg B_i = 24 = (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 6)$ .

При  $V = 7$  число сферических графов резко возрастает и поэтому, чтобы не утомлять читателя большим количеством рисунков и тем более, что для наших исследований все эти графы нам не понадобятся, мы решили показать только несколько характерных примеров. Заинтересованный читатель может самостоятельно продолжить поиск остальных графов. Каково их общее количество нам не известно.

Для случая 1) покажем три графа:

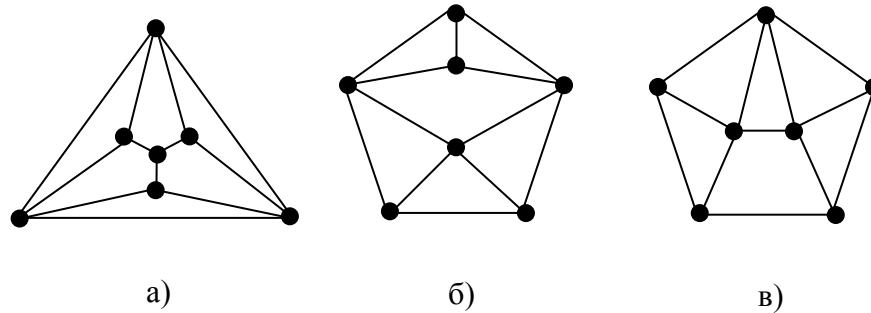


Рис. 17

Для случая 2) покажем два графа:

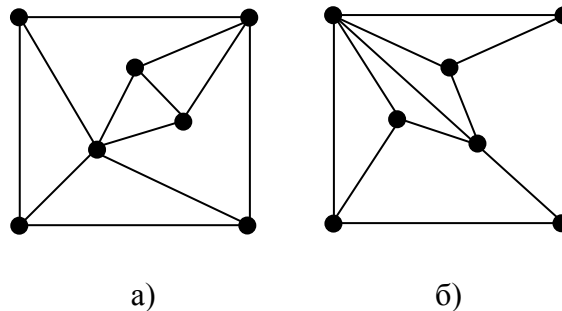


Рис. 18

Для случая 3) существует единственный граф.

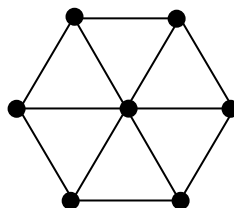


Рис. 19

Прежде чем продолжить наши исследования, предлагаем нашим читателям выяснить, существуют ли среди графов, изображённых на Рис.13 – Рис. 19, сферические графы, для которых невозможно построить изоморфные им многогранники.

Теперь нам предстоит познакомить читателя с ещё некоторыми понятиями общей теории графов.

Все приведённые выше графы будем рассматривать теперь только как уложенные на сфере.

Известно, что всякий планарный граф  $G$  имеет двойственный (или геометрически двойственный) граф  $G^*$ .

Покажем, что такое двойственный граф

Чтобы построить граф  $G^*$ , необходимо в каждой грани графа  $G$  взять по одной точке. Это будут вершины  $B_i^*$  будущего графа  $G^*$ . Если две грани  $\Gamma_i$  и  $\Gamma_j$  графа  $G$  имеют общее ребро  $P_{ij}$ , то соединяем вершины  $B_i^*$  и  $B_j^*$  ребром  $P_{ij}^*$ , причём так, чтобы оно пересекло один раз ребро  $P_{ij}$  и больше никакое другое ребро. В результате таких построений однозначно получаем граф  $G^*$ . Граф  $G^*$ , естественно, также является сферическим графом.

Все рассмотренные графы допускают единственную укладку на сфере и поэтому имеют и единственный двойственный граф.

Покажем пример построения двойственных графов.

Начнём наше рассмотрение с простейшего сферического графа Рис. 20.

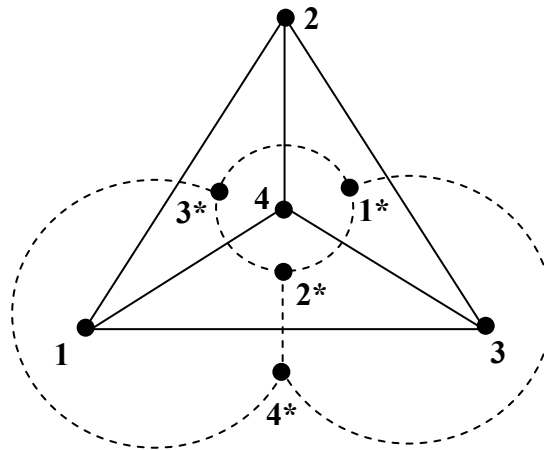


Рис. 20

Наш граф имеет 4 грани:  $(1, 2, 4)$ ,  $(2, 3, 4)$ ,  $(1, 4, 3)$ ,  $(1, 2, 3)$ . Поместим в каждой грани по одной точке. Это будут вершины нового двойственного графа  $G^*$ :  $1^* \leftrightarrow (2, 3, 4)$ ;  $2^* \leftrightarrow (1, 4, 3)$ ;  $3^* \leftrightarrow (1, 2, 4)$ ;  $4^* \leftrightarrow (1, 2, 3)$ .

Чтобы не загромождать рисунок, точку  $4^*$  вынесем за граф  $G$ , но будем считать, что она соответствует грани  $(1, 2, 3)$ .

Грани  $(1, 2, 4)$  и  $(2, 3, 4)$  имеют общее ребро  $\{2, 4\}$  поэтому соединяем вершины  $3^*$  и  $1^*$  новым ребром  $\{1^*, 3^*\}$ . Грани  $(2, 3, 4)$  и  $(1, 3, 4)$  имеют общее ребро  $\{3, 4\}$ , поэтому проводим новое ребро  $\{1^*, 2^*\}$ , и т.д..

Получаем новый граф  $G^*$ , двойственный графу  $G$ .

Как видим, в нашем случае граф  $G$  изоморфен своему двойственному графу  $G^*$ .

$$V = V^*, P = P^*, \Gamma = \Gamma^*. \quad (6)$$

Покажем все двойственные и самодвойственные графы среди тех, которые мы нашли ранее. Самодвойственным графом будем называть такой граф, который изоморфен своему двойственному графу.

Как видим из построения, для двойственных графов должны выполняться соотношения:

$$B = \Gamma^*, P = P^*, \Gamma = B^*. \quad (7)$$

Из (6) и (7) заключаем, что если двойственные графы изоморфны, то

$$P = P^*, B = \Gamma = B^* = \Gamma^*.$$

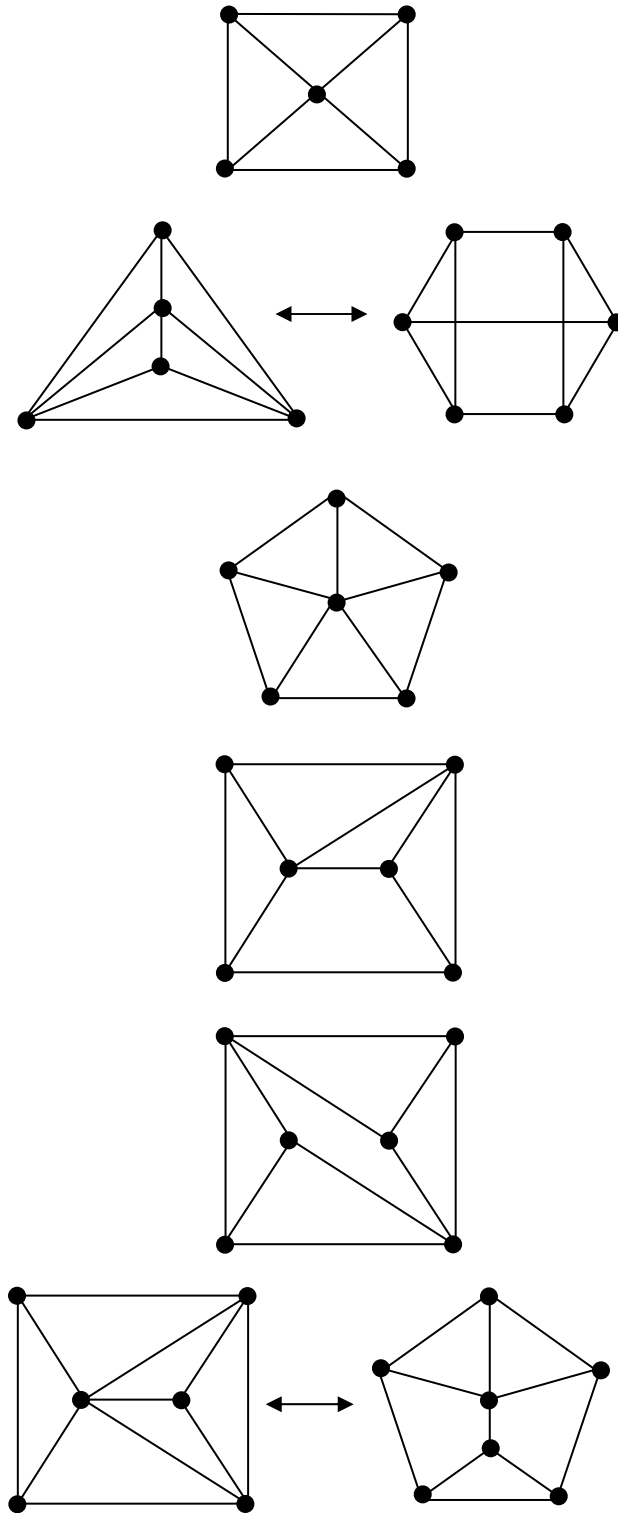


Рис. 21

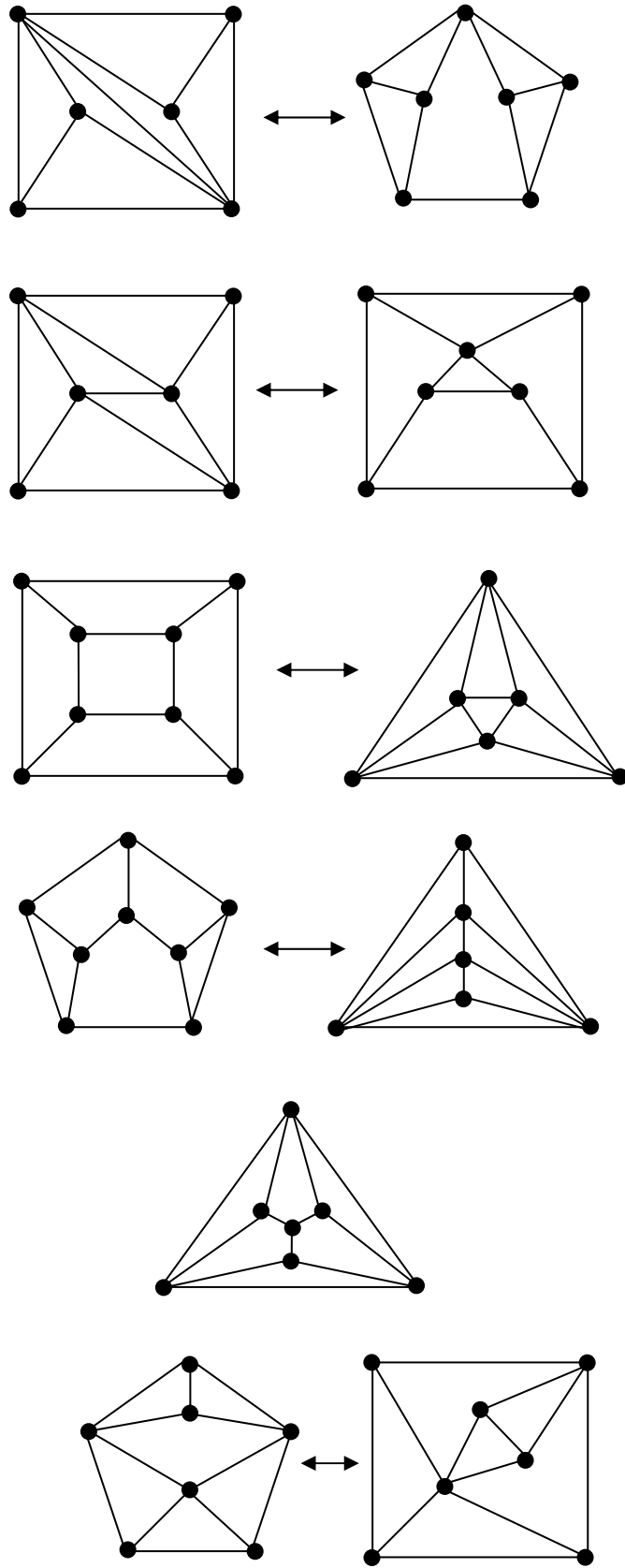


Рис. 22

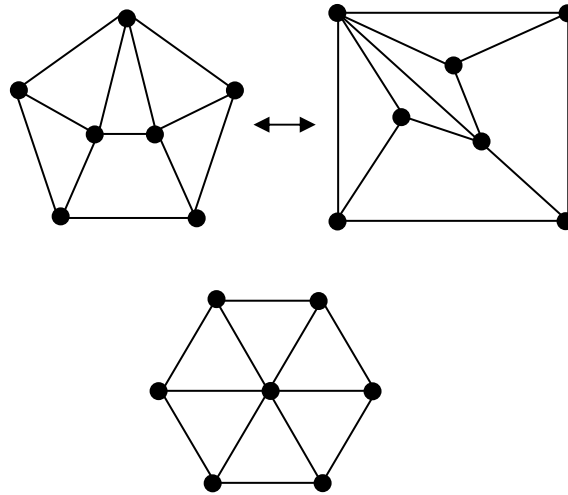


Рис. 23

Определение 8.

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов.

Пример:

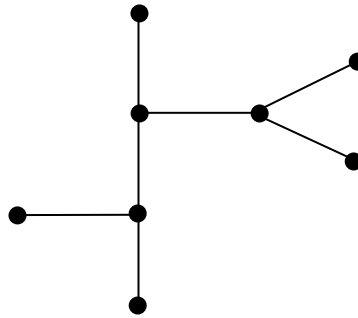


Рис. 24

Если граф имеет хотя бы одну грань, то рёбра, принадлежащие этой грани, образуют цикл и такой граф не может быть деревом.

Для дерева всегда справедливо такое соотношение:

$$P = B - 1.$$

Теперь введём понятие правильной развёртки сферического графа.

Представим, что наша сфера сделана из материала, который можно произвольно деформировать по нашему желанию. Если из такой сферы вырезать сферический треугольник, то его всегда можно путём деформаций превратить в правильный треугольник и уложить на плоскость стола.

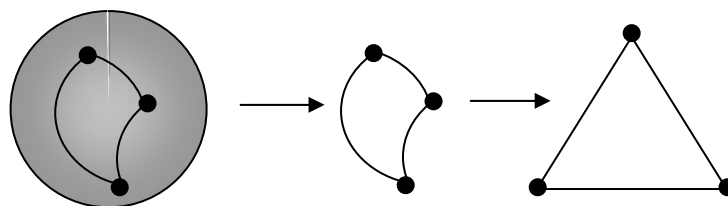


Рис. 25

Предположим, что на нашей сфере нарисован сферический граф, имеющий  $V$  вершин. Разрежем этот граф вдоль рёбер таким образом, чтобы граф разреза представлял собой дерево имеющее  $V-1$  ребро, причём все вершины сферического графа должны быть вершинами графа разреза.

При таких условиях разреза, сфера не распадётся на несколько частей, а останется одним целым куском. Теперь, превратив каждую грань сферического графа в правильный многоугольник и уложим полученную фигуру на плоскость стола. Такая фигура и будет называться правильной развёрткой сферического графа.

Можно было бы ввести понятие правильной развёртки сферического графа, отталкиваясь от понятия развёртки полиэдра. Но мы знаем, что не для всякого сферического графа существует изоморфный ему полиэдр.

Пример:

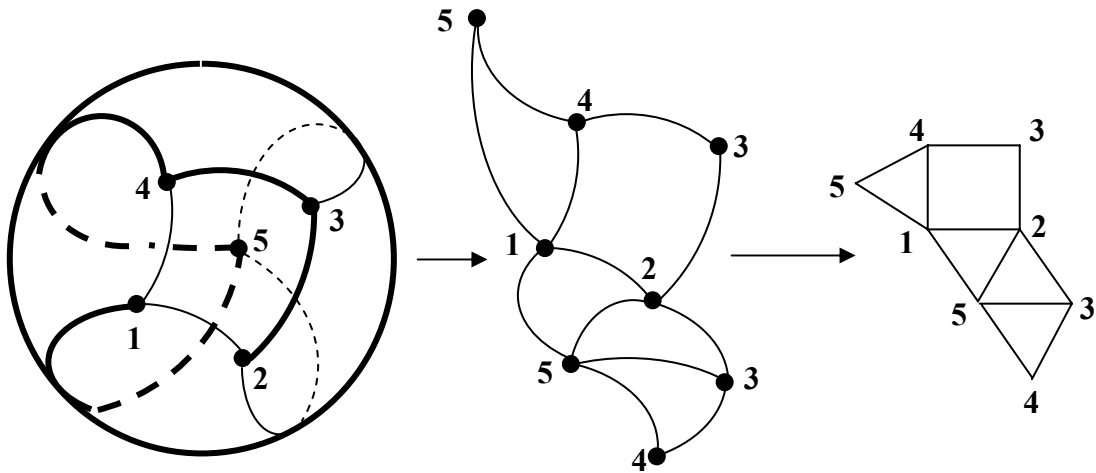


Рис. 26

Жирными линиями на сфере обозначен разрез нашего сферического графа. Как видим, это дерево:



Рис. 27

Причём дерево содержит все вершины исходного графа и число рёбер равно  $P = V - 1 = 4$ .

Рассмотрим первую пару двойственных графов.

Перерисуем их в более наглядном виде:

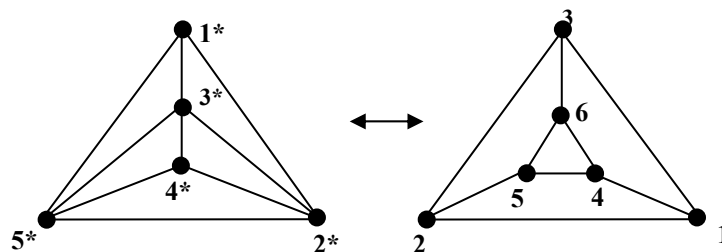


Рис. 28

Совместим два графа на одном рисунке по всем правилам построения двойственных графов.

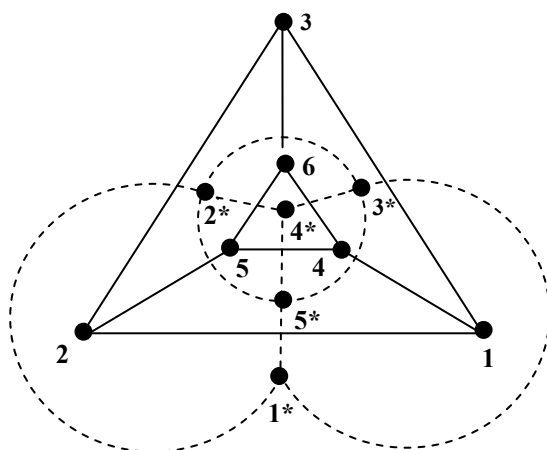


Рис. 29

Для данных сферических графов существуют изоморфные полиэдры, поэтому, когда это возможно, мы будем для наглядности прибегать к помощи изоморфных фигур.

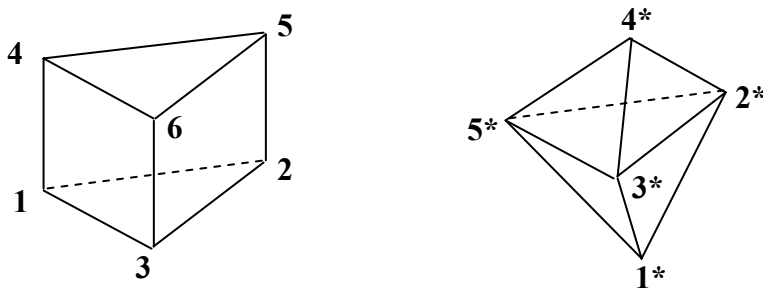


Рис. 30

Полиэдр призма имеет 6 вершин, поэтому, чтобы получить его развёртку, необходимо разрезать 5 рёбер. Покажем разрез и развёртку, соответствующую этому разрезу (Рис. 31, а).

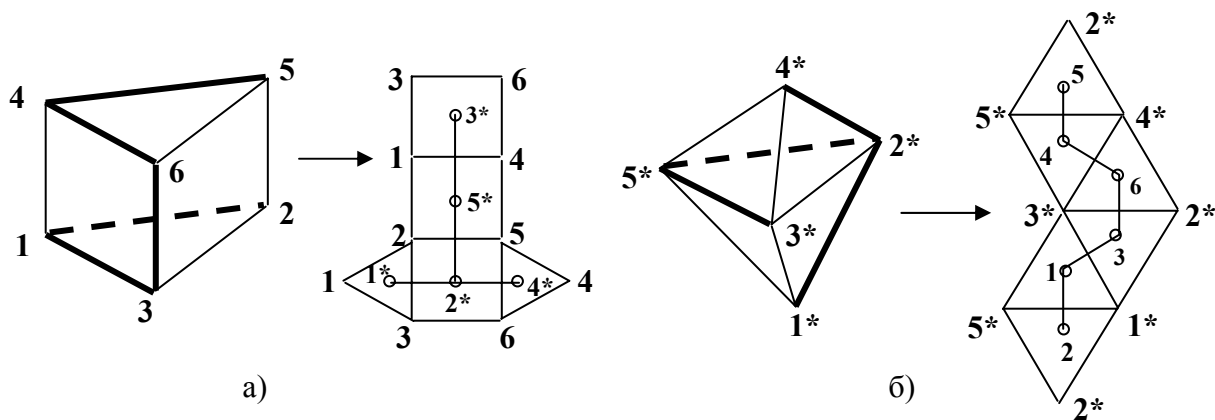


Рис.31



В каждой грани развёртки мы показали соответствующую вершину двойственного полиэдра (см. Рис.29). Причём, как видим, и это естественно, что вершины и рёбра двойственного графа, изображённого на развёртке, образуют дерево. Следовательно, выполнив разрез, в соответствии с этим деревом, мы получим развёртку двойственного полиэдра (Рис. 31, б)).

Т.о. мы получили соответствие между правильными развёртками двойственных полиэдров и, следовательно, - между правильными развёртками двойственных сферических графов.

Заметим, что данные полиэдры можно построить, используя в качестве граней правильные многоугольники: треугольник и квадрат. Тогда не прибегая ни к каким трансформациям, мы всегда будем получать правильные развёртки этих полиэдров.

Если читатель немного запасётся терпением и попытается отыскать все развёртки данных полиэдров, то обнаружит необычный факт, который кажется на первый взгляд парадоксом, и который разрушает все наши предыдущие построения. А именно: число развёрток призмы равно **9**, а число развёрток двойной пирамиды равно **8**. Но ведь мы только что перед этим утверждали об однозначном соответствии двойственных разрезов, а следовательно и двойственных развёрток. Объясняется это противоречие тем, что двойная пирамида может быть разрезана двумя топологически различными способами, но, в результате которых, получается одна и та же развёртка.

Покажем двойственные развёртки этих полиэдров.

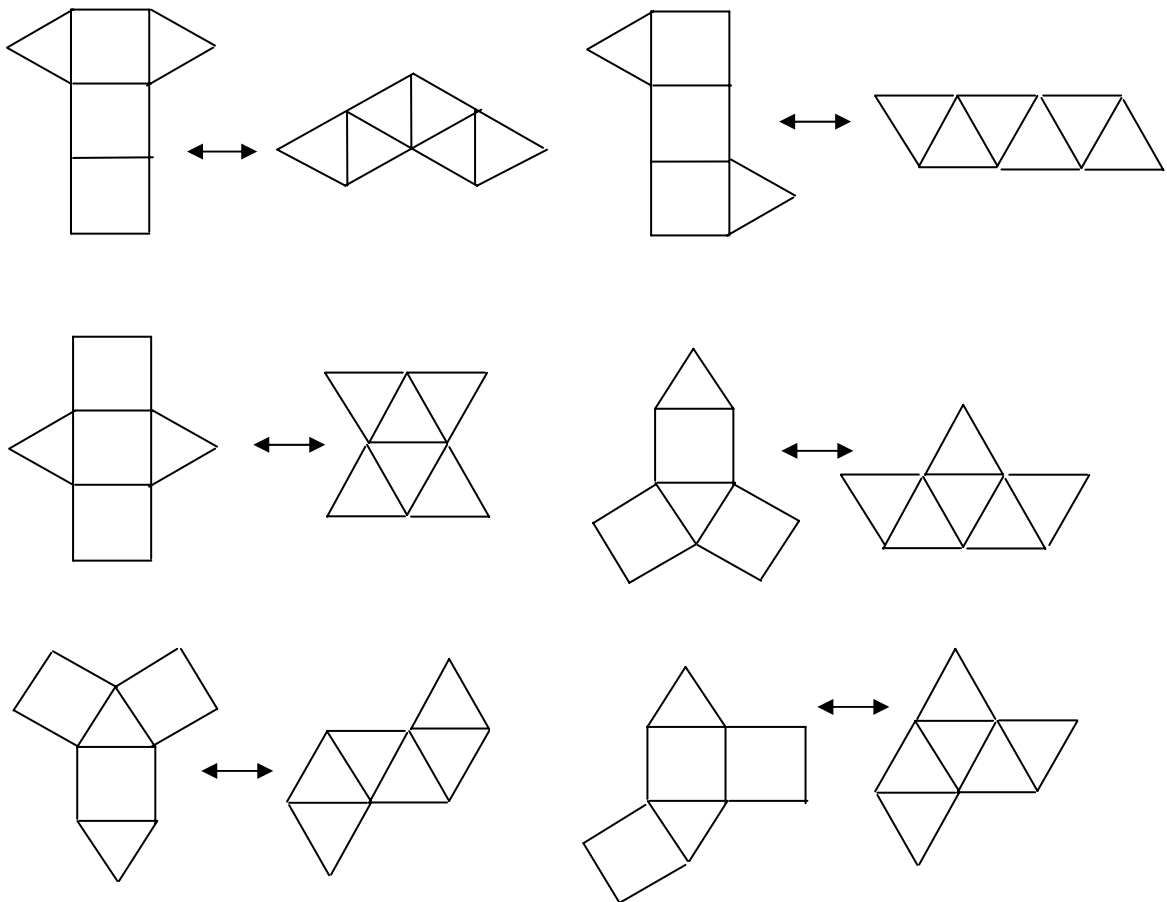


Рис. 32

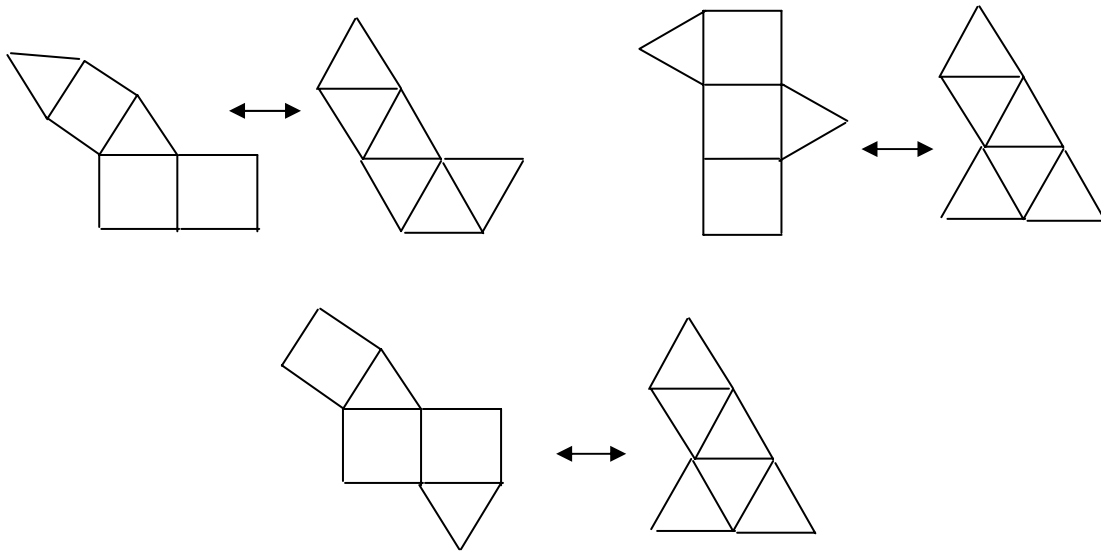


Рис. 33

Как видим в двух последних случаях, различные развёртки призмы имеют одну и ту же им двойственную развёртку двойной пирамиды, получаемую при помощи двух различных разрезов.

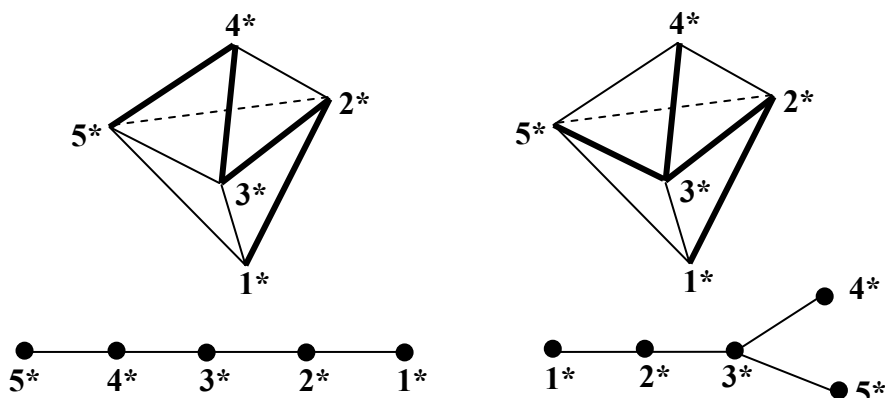


Рис. 34

Из Рис. 34 видим, что деревья разрезов действительно топологически различны.

**Мы предполагаем, что различное число развёрток двойственных полиэдров связано с различным составом граней этих полиэдров. Призма имеет грани двух типов - треугольник и квадрат. Грани же двойной пирамиды - все треугольники.**

Возникает и такой вопрос. Если сферический граф является самодвойственным, то каждая ли его развёртка также самодвойственна?

Простейшим самодвойственным графом является граф, изоморфный тетраэдру. Он имеет всего две развёртки и каждая из них является самодвойственной.

Но это не всегда так. Уже следующий самодвойственный граф, изоморфный пятигранной пирамиде, опровергает это предположение. Из его 8-ми развёрток 6 оказались самодвойственными, а 2 – взаимодвойственными.

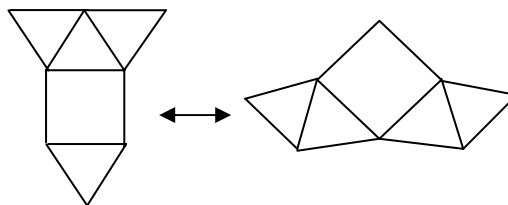


Рис. 35

Читатель может осуществить поиск оставшихся 6-ти развёрток и убедиться, что все они самодвойственны.

Можно сказать, что число правильных развёрток - это ещё одна характеристика сферического графа (кроме числа вершин, числа рёбер и числа граней). Правда отметим, что поиск всех развёрток полиэдра или сферического графа дело трудоёмкое.

Алгоритм нахождения развёрток нам неизвестен. Мы можем только дать читателю такую рекомендацию. Если вам захочется отыскать развёртки какого-нибудь полиэдра, то проверьте сначала существует ли для него двойственный полиэдр. Имея двойственные полиэдры, отыскать все их развёртки гораздо легче, чем отыскать развёртки самодвойственного полиэдра. Например построить все развёртки призмы легче, чем двойной пирамиды. Зная развёртки призмы можно найти их двойственные развёртки двойной пирамиды. Может случиться так, что вы нашли уже часть развёрток одного полиэдра и часть развёрток полиэдра ему двойственного. Тогда найдя двойственные развёртки уже найденным развёрткам вы получите более полную картину, а может быть и все сразу.

**Интересно было бы выяснить, существует ли зависимость числа развёрток от числа граней, вершин и рёбер данного полиэдра?**

Так как мы договорились изображать развёртки сферических графов только при помощи правильных многоугольников, то наверное уместно ввести ещё одну характеристику: число развёрток, обладающих симметрией. А также и число симметрии развёрток данного сферического графа. Среди развёрток, показанных на Рис.31, есть развёртки обладающие осевой симметрией и центральной симметрией, а также развёртки, имеющие и ту и другую симметрию одновременно. Мы думаем, что читатель без труда их отыщет.

Исследуем такую задачу: всегда ли симметричная развёртка сферического графа имеет симметричную двойственную развёртку двойственного сферического графа.

Рассмотрим пример призмы и двойной пирамиды. Как видим, симметрия двойственных развёрток сохраняется.

Рассмотрим следующую пару двойственных графов.

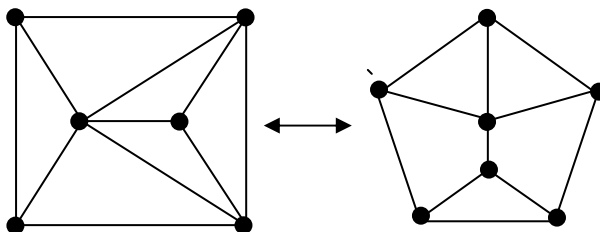


Рис. 36

Естественно, мы ограничимся рассмотрением только симметричных развёрток. Оказалось, что каждый из этих графов имеет по пять симметричных развёрток, причём все они попарно двойственны между собой. Покажем их здесь.

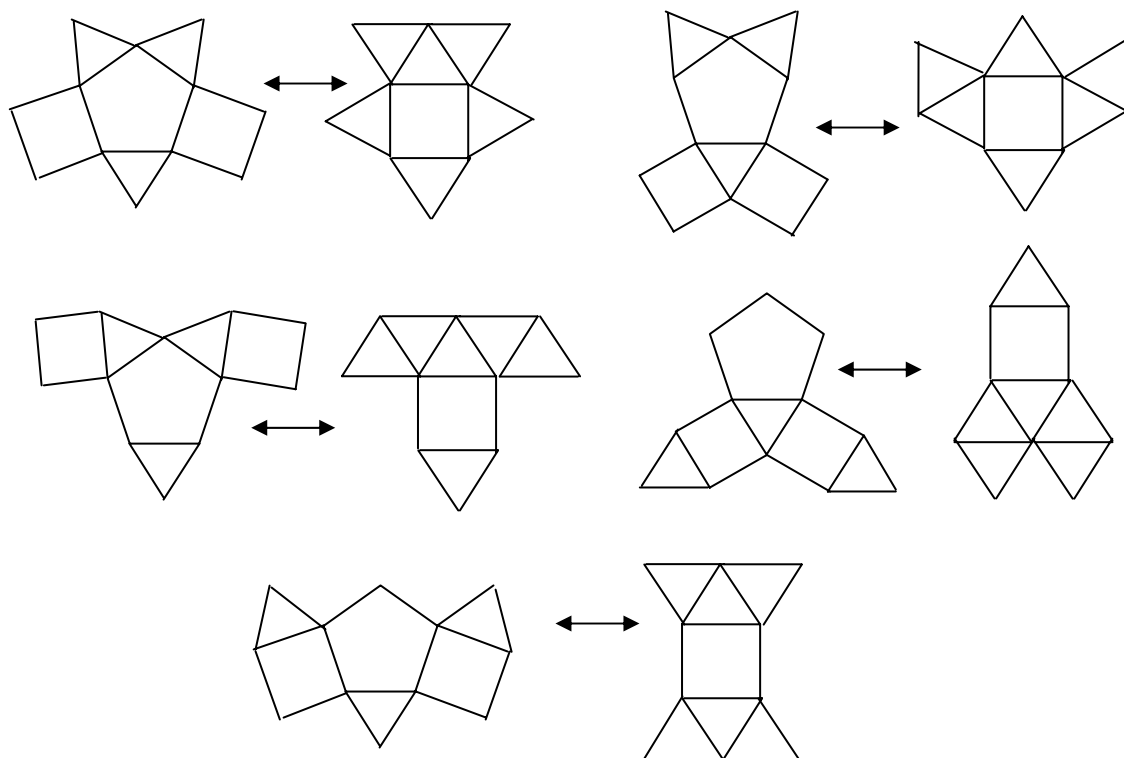


Рис. 37

Рассмотрим следующую пару двойственных сферических графов.

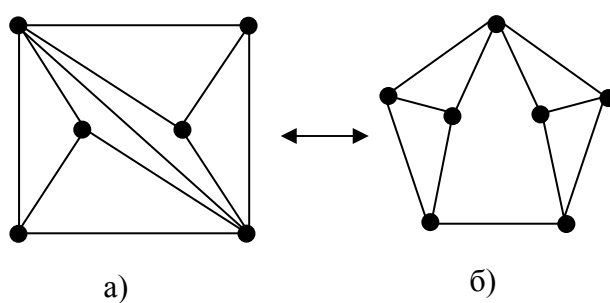


Рис. 38

Сразу заметим, что данные сферические графы не имеют изоморфных полиэдров.

Как выяснилось, данные графы имеют различное число симметричных развёрток. Граф б) имеет 8 симметричных развёрток, а граф а) - 7. Здесь мы опять столкнулись со случаем, как и в первой паре двойственных графов. Покажем двойственные пары симметричных развёрток.

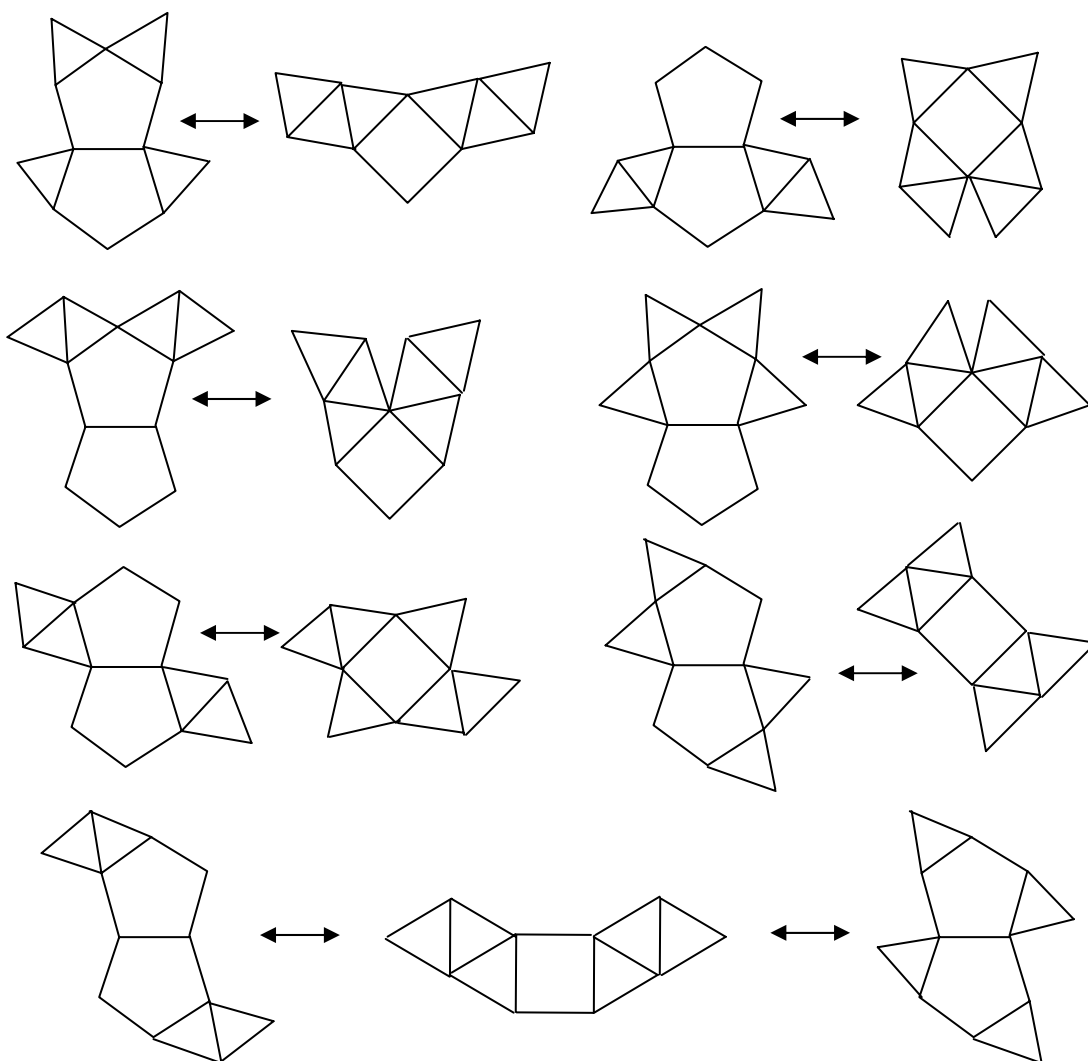


Рис. 39

Исследование симметричных развёрток следующей пары двойственных сферических графов мы оставляем читателю. Попробуйте найти все симметричные развёртки этих графов и установить, какие из них являются двойственными. Нарушается ли в этом случае наше предположение? Наш ответ на этот вопрос мы приведём в конце этой главы. Речь идёт о двойственных графах, показанных на Рис.40.

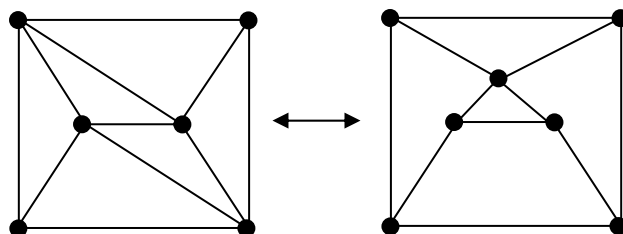


Рис. 40

Имеют ли данные сферические графы изоморфные полиэдры?

А мы переходим к рассмотрению следующей пары двойственных сферических графов (Рис 41).

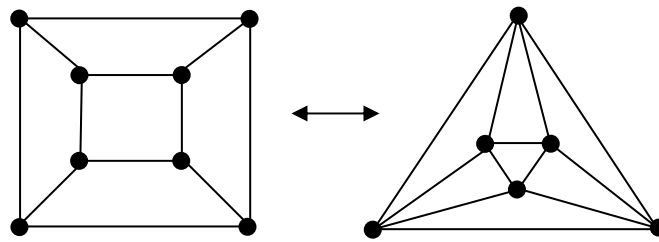


Рис. 41

Сразу скажем, что данные графы имеют изоморфные полиэдры.

Более того, эти полиэдры являются известными Платоновыми телами - кубом и октаэдром. Двойственность этих полиэдров настолько удивительна, что мы решили остановиться на них более подробно.

Первое, что мы выяснили - это то, что данные полиэдры имеют одинаковое число развёрток - 11.

Каждый из этих полиэдров имеет по две развёртки, обладающие осевой (зеркальной) симметрией.

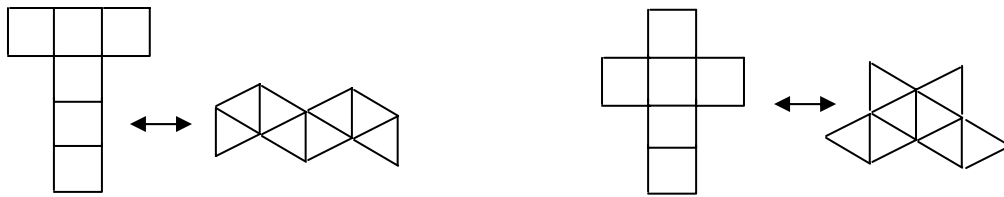


Рис.42

По четыре развёртки, обладающие центральной симметрией.

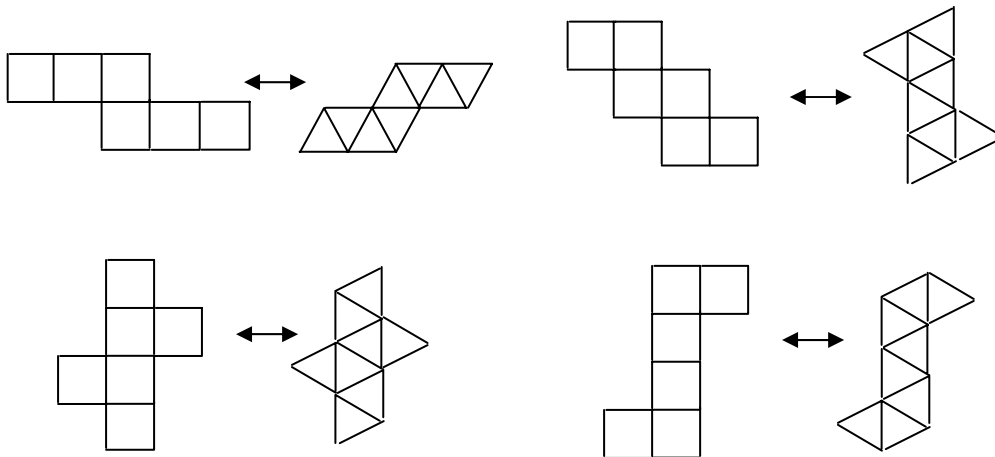


Рис. 43

И по пять развёрток не обладающие никакой симметрией. Но двойственные развёртки настолько «похожи» друг на друга, что мы решили их тоже здесь показать.

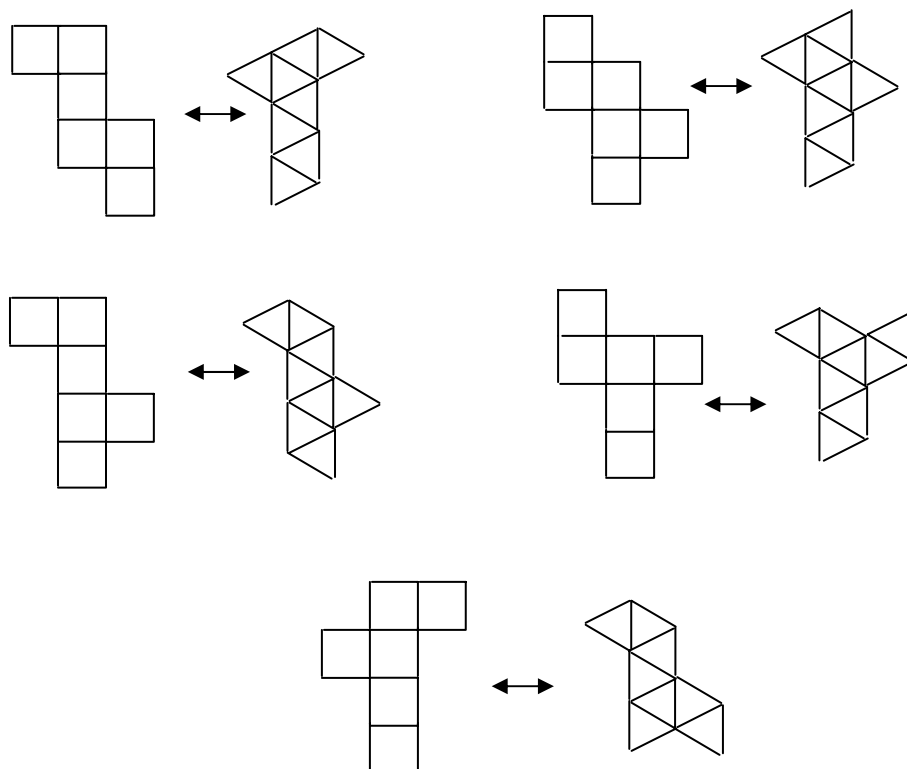


Рис. 44

Известно, что и другая пара Платоновых тел додекаэдр и икосаэдр так же являются двойственными полиэдрами. **Мы выдвигаем гипотезу, что и для этой пары полиэдров будет сохраняться подобная двойственность (число развёрток и их симметрия).** А, может быть, появятся и другие типы симметрии. Или ещё какие-нибудь новые интересные свойства.

Рассмотрим очередную пару двойственных сферических графов.

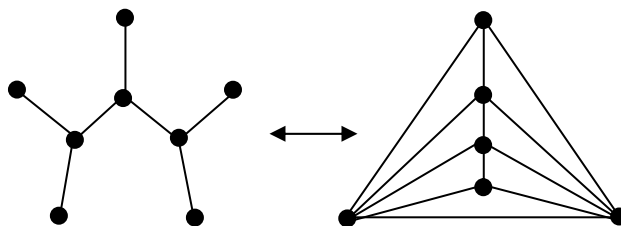


Рис. 45

Данные сферические графы имеют различное число симметричных развёрток, но это не нарушает их двойственности.

Сначала покажем двойственные развёртки, обладающие осевой симметрией.

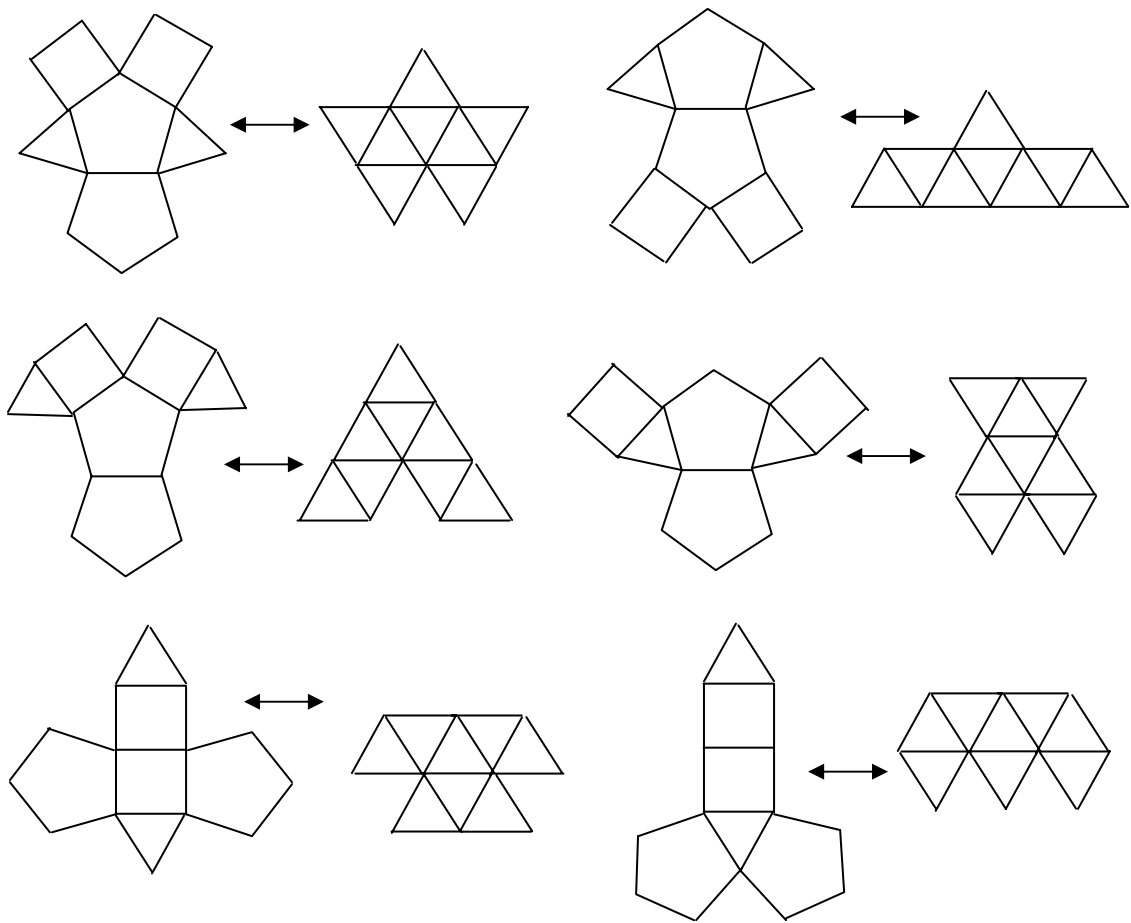


Рис. 46

Развёртки, имеющие центральную симметрию:

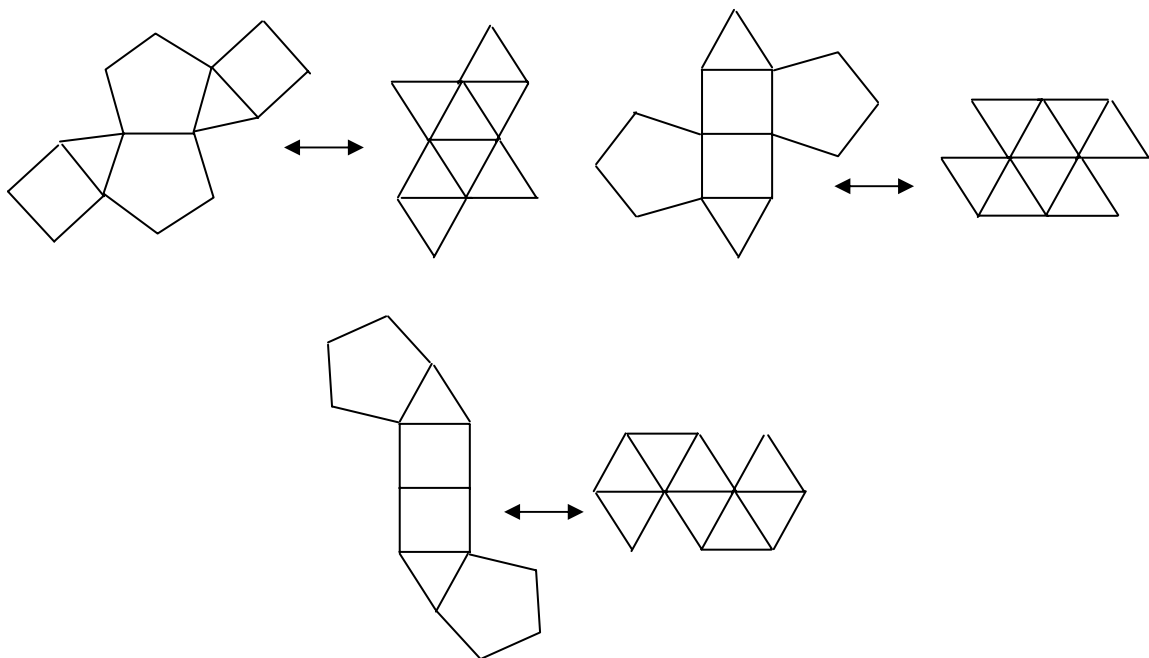


Рис. 47



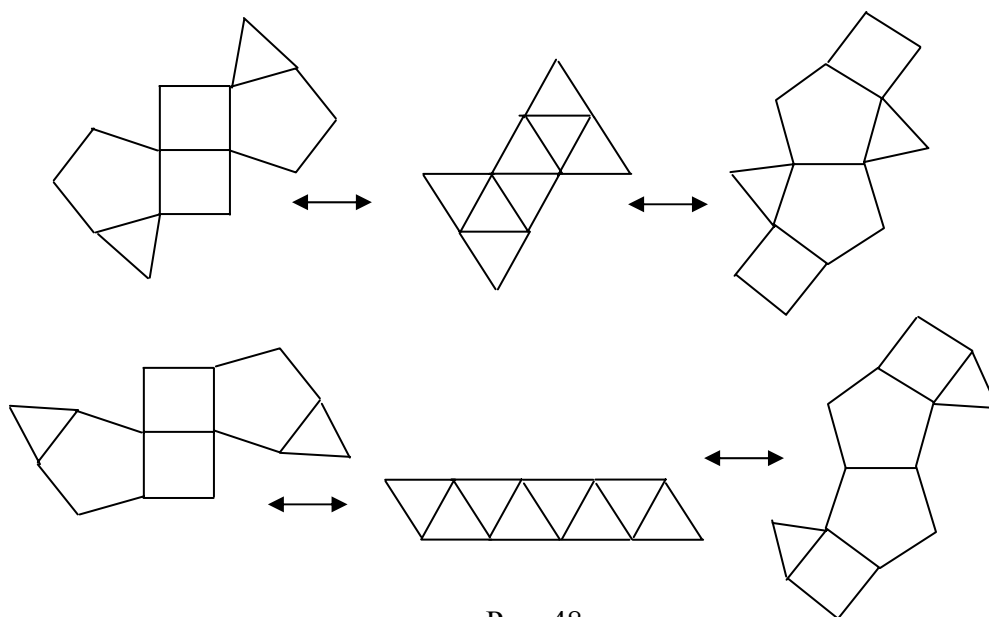


Рис. 48

Следующая пара двойственных сферических графов, как нам кажется, вообще не имеет симметричных развёрток. Может быть читателю удастся нас опровергнуть?

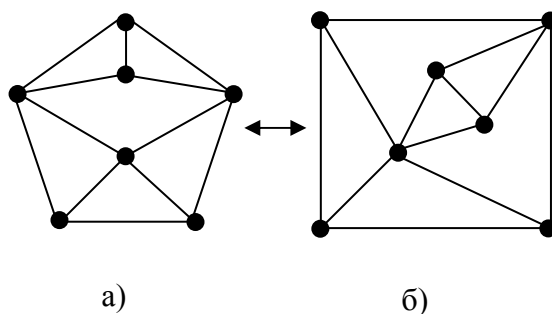


Рис. 49

Заметим ещё такую особенность. Граф а) не имеет изоморфного полиэдра, а для графа б) такой полиэдр существует. Несмотря на это, графы эти являются двойственными.

Ну и рассмотрим последнюю пару двойственных сферических графов.

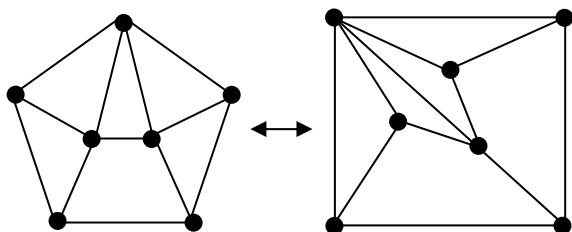


Рис. 50

Данные графы имеют симметричные развёртки, обладающие только осевой симметрией.

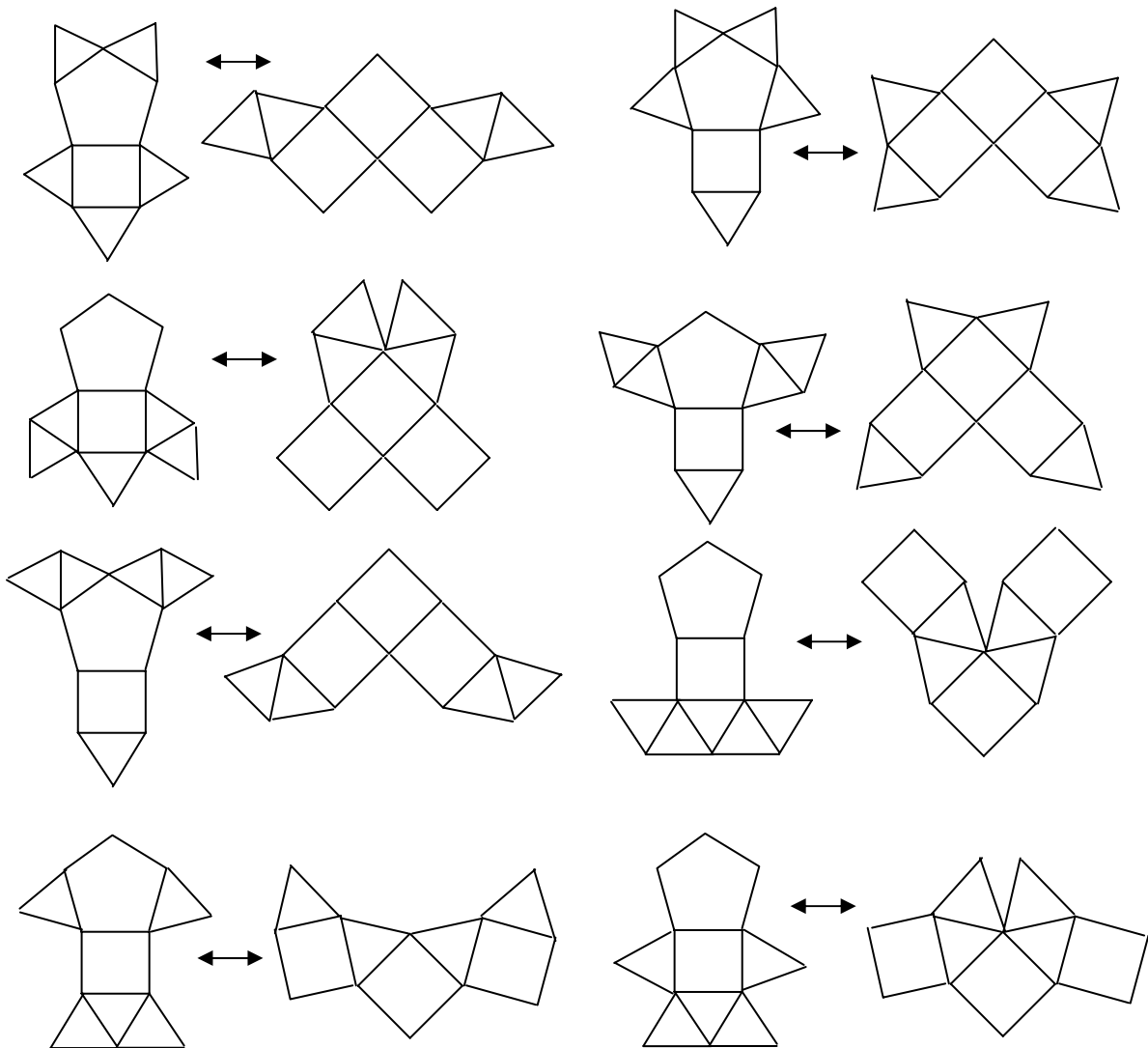


Рис. 51

Мы рассмотрели все имеющиеся у нас пары двойственных сферических графов. Читатель может продолжить список этих пар и попытаться ещё найти двойственные сферические графы, симметричные развёртки у которых были бы так же двойственны. Напомним, что мы рассматривали только простые сферические графы, т.е. те, которые допускают только единственную укладку на сфере. Если планарный граф имеет две и более различных укладок на сфере (а такие графы появляются уже при  $P = 13$ ), то не исключено, что такой граф будет иметь несколько двойственных графов.

Нам кажется, что было бы интересно провести исследование несамодвойственных развёрток самодвойственных графов. Существуют ли самодвойственные графы, кроме тех которые мы уже рассмотрели, у которых симметричные несамодвойственные развёртки двойственны также симметричным развёрткам. Как это было в примере с пятигранной пирамидой (Рис.35).

Напомним, какие самодвойственные графы у нас остались нерассмотрены.

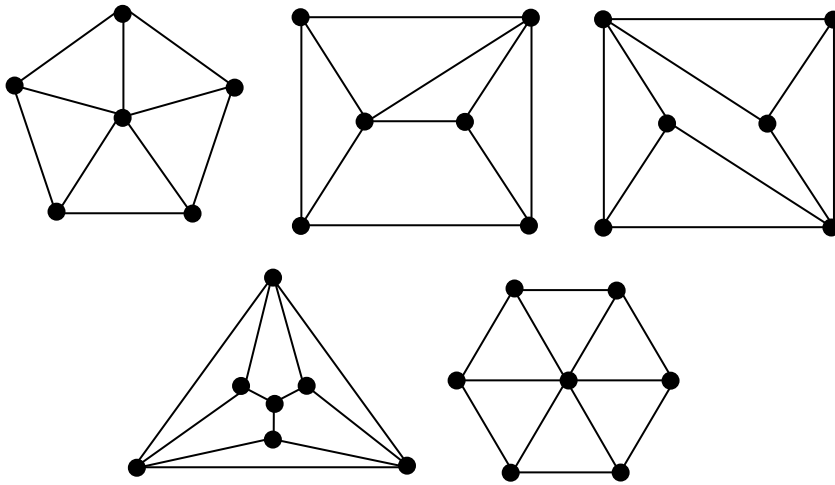


Рис. 52

В заключение покажем связь характеристик  $B$ ,  $P$ ,  $\Gamma$  между двумя двойственными развёртками.

Для всякого полиэдра, как мы уже говорили, справедлива формула Эйлера. Перепишем её ещё раз:

$$B + \Gamma - P = 2. \quad (8)$$

Введём обозначения для характеристик развёртки:  $\tilde{B}$  - число вершин,  $\tilde{\Gamma}$  - число граней,  $\tilde{P}$  - число рёбер.

Всякая развёртка представляет собой плоскую сеть, для которой известна формула:

$$\tilde{B} + \tilde{\Gamma} - \tilde{P} = 1. \quad (9)$$

Мы будем искать такие зависимости:

$$\tilde{B} = f_1(B, \Gamma, P); \quad \tilde{\Gamma} = f_2(B, \Gamma, P); \quad \tilde{P} = f_3(B, \Gamma, P).$$

Сразу отметим, что  $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ , это очевидно.

Всякая развёртка, имеющая  $\Gamma$  граней, говорит о том, что дерево разреза двойственного графа должно иметь  $\Gamma$  вершин и следовательно  $\Gamma - 1$  рёбер. Но т.к. общее число разрезаемых рёбер в двойственных графах, при получении двойственных развёрток равно  $P$ , то число разрезаемых рёбер данного сферического графа равно:

$$\tilde{P} - (\Gamma - 1) = P - \Gamma + 1.$$

Т.е. в получаемой развёртке будем иметь рёбер больше чем в данном графе на  $P - \Gamma + 1$  ребро, т.е.

$$\tilde{P} = P + P - \Gamma + 1 = 2P - \Gamma + 1.$$

Подставляя полученное выражение в (9), и с учётом того, что  $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ , получаем:

$$\tilde{B} + \Gamma - 2P + \Gamma - 1 = 1, \quad \tilde{B} + 2\Gamma - 2P = 2,$$

но  $2\Gamma - 2P = 4 - 2B$  (из формулы (8)), откуда:  $\tilde{B} + 4 - 2B = 2$ , т.е.  $\tilde{B} = 2(B - 1)$ .

Т.о. имеем такие формулы, связывающие характеристики развёртки с характеристиками своего сферического графа:

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma, \quad \tilde{P} = 2P - \Gamma + 1, \quad \tilde{B} = 2(B - 1). \quad (10)$$

Ранее мы показали, что связь характеристик сферического графа ( $B, \Gamma, P$ ) и двойственного ему графа ( $B^*, \Gamma^*, P^*$ ) выражается формулами:  $B = \Gamma^*, P = P^*, \Gamma = B^*$ .

Обозначим через  $\tilde{B}^*, \tilde{\Gamma}^*, \tilde{P}^*$  соответствующие характеристики развёртки двойственного графа, т.е.

$$\tilde{\Gamma}^* = \Gamma^*, \quad \tilde{P}^* = 2P^* - \Gamma^* + 1, \quad \tilde{B}^* = 2(B^* - 1).$$

Теперь можно вывести связь между характеристиками развёрток двойственных графов:

$$\tilde{\Gamma}^* = \frac{1}{2}\tilde{B} + 1, \quad \tilde{P}^* = \tilde{P} + \tilde{\Gamma} - \frac{1}{2}\tilde{B} - 1, \quad \tilde{B}^* = 2(\tilde{\Gamma} - 1). \quad (11)$$

Сложим левые и правые части полученных выражений, получим:

$$\tilde{B}^* + \tilde{\Gamma}^* + \tilde{P}^* = 3\tilde{\Gamma} + \tilde{P} - 2$$

Но помним, что  $2 = 2\tilde{B} + 2\tilde{\Gamma} - 2\tilde{P}$  (из формулы (9)), тогда

$$\tilde{B}^* + \tilde{\Gamma}^* + \tilde{P}^* = \tilde{\Gamma} + 3\tilde{P} - 2\tilde{B}. \quad (12)$$

Для самодвойственных графов имеем:  $\tilde{B}^* = \tilde{B}$ ,  $\tilde{\Gamma}^* = \tilde{\Gamma}$ ,  $\tilde{P}^* = \tilde{P}$ . Тогда получаем:

$$2\tilde{P} = 3\tilde{B} \quad (13)$$

Мы нашли важную характеристику развёрток самодвойственных графов.

Т.о. если развёртка некоторого сферического графа имеет число вершин и число рёбер отвечающее выражению (13), то можно утверждать, что такая развёртка принадлежит самодвойственному графу.

Из формулы (13) и формулы (9) легко можно вывести другую важную характеристику развёрток самодвойственных сферических графов:

$$2\tilde{\Gamma} = \tilde{B} + 2. \quad (14)$$

Из формул (13) и (14) можно получить ещё одну формулу для характеристик развёрток самодвойственных графов:

$$\tilde{P} = 3(\tilde{\Gamma} - 1) \tag{15}$$

Кроме этого введём критерий, определяющий максимальную степень вершины в развёртке.

Мы помним, что  $\max(\deg B_i) \leq B - 1$ . В самом крайнем случае степень вершины в развёртке может быть увеличена только на единицу, т.е. имеем:  $2 \leq \deg \tilde{B}_i \leq B$ , но  $\tilde{B} = 2(B - 1)$  или  $B = \frac{1}{2}\tilde{B} + 1$ . Т. е. получаем:

$$2 \leq \deg \tilde{B}_i \leq \frac{1}{2}\tilde{B} + 1. \tag{16}$$

И кроме этого для развёртки можно ввести ещё один критерий. А именно: число рёбер, составляющих внешнюю границу развёртки  $\tilde{P}_r$ . Внешняя граница, очевидно, равна удвоенному числу разрезаемых рёбер. А число разрезаемых рёбер равно  $B - 1$ . Откуда получаем:

$$\tilde{P}_r = 2(B - 1) \text{ или } \tilde{P}_r = \tilde{B}. \tag{17}$$

А теперь вернёмся к задаче, которую мы адресовали читателю. Покажем все симметричные развёртки графов, изображённых на Рис.134. Мы нашли 6 таких развёрток.

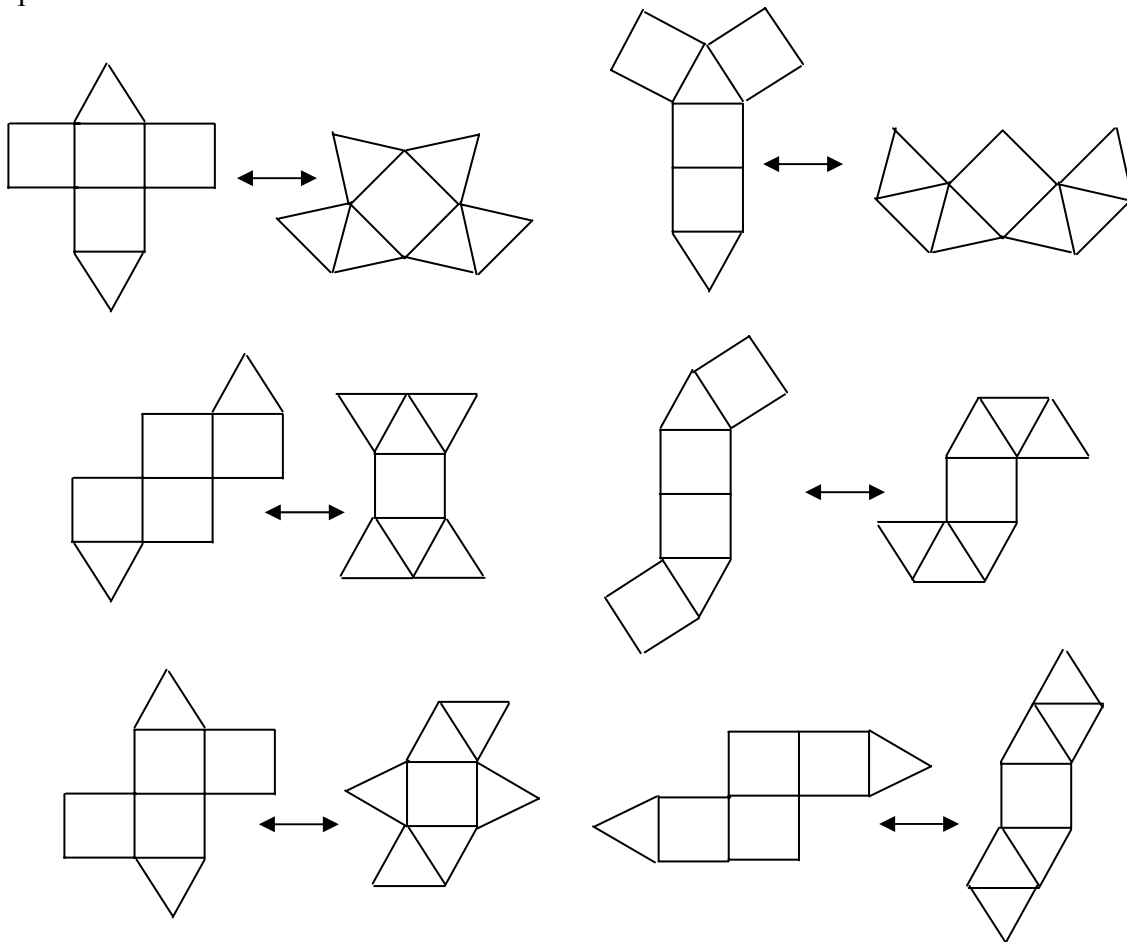


Рис. 53

Тот читатель, который уже потренировался в нахождении двойственных развёрток, наверняка догадался, как надо строить двойственные разрезы не прибегая к вычерчиванию развёрток.

Покажем это на примере последних графов.

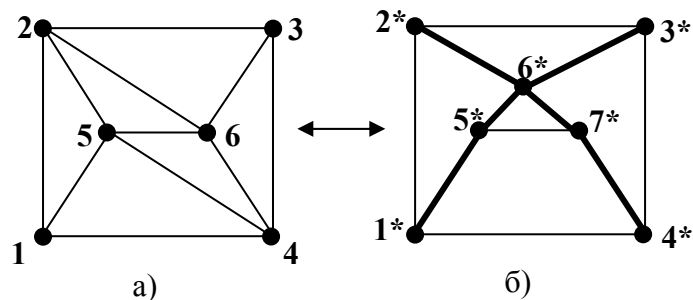


Рис. 54

Совместим эти графы по правилам двойственности.

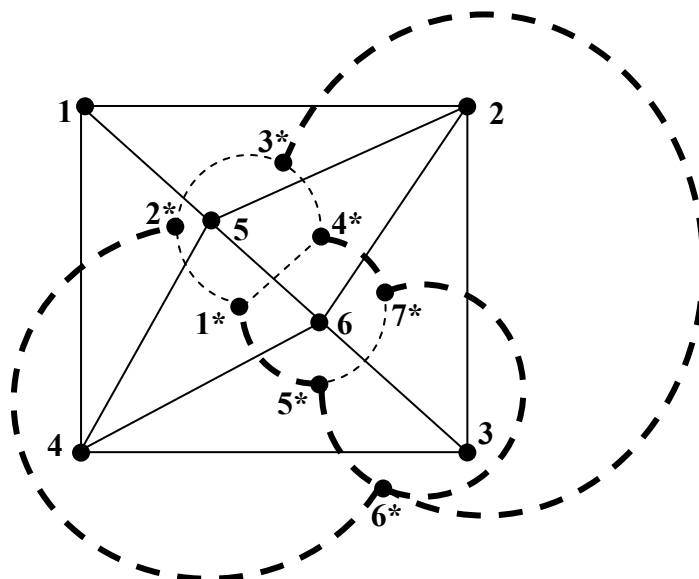


Рис. 55

Мы хотим найти разрез, двойственный разрезу, показанному жирными пунктирными линиями. Для этого надо жирно выделить те рёбра графа а), которые не пересекаются жирными пунктирными линиями, т.е.

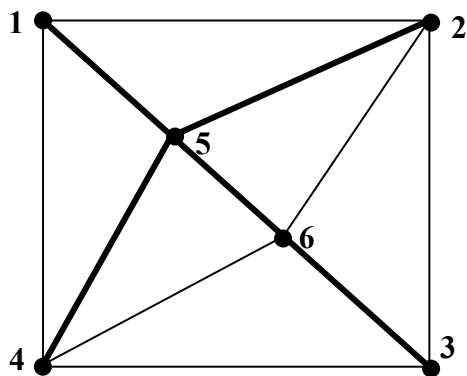


Рис. 56

Это и будет двойственный разрез. Теперь, согласно этим разрезам, находим двойственные развёртки:

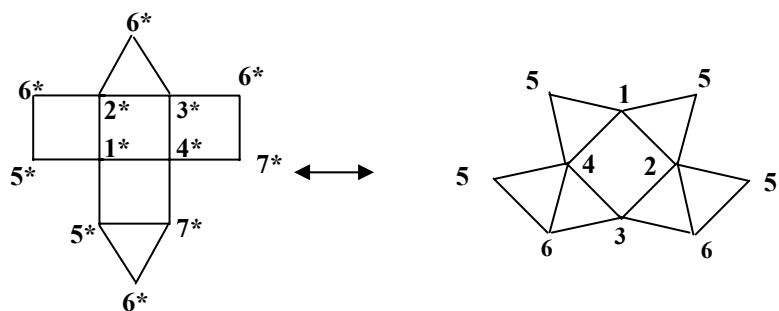


Рис. 57