Франц Герман

Теория *КД* - конфигураций
(www.franz-hermann.com)

1. Введение

Скажем несколько слов о цели нашего исследования.

Самым фундаментальным принципом проективной геометрии является принцип двойственности.

Своим рождением принцип двойственности обязан введению в проективную геометрию понятия однородных координат (Julius Plücker).

Уравнение прямой $T(t_1 : t_2 : t_3)$, проходящей через точку $X(x_1 : x_2 : x_3)$, имеет вид:

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 = 0 \quad (1)$$

Как видим, координаты прямой и координаты точки совершенно равноправны (симметричны) в уравнении (1), т.е. мы с таким же успехом могли бы сказать, глядя на данное уравнение, что прямая $X(x_1 : x_2 : x_3)$ проходит через точку $T(t_1 : t_2 : t_3)$.

Это положение и является ключевым в рождении принципа двойственности.

Таким образом, сыграв свою роль в появлении принципа двойственности, однородные координаты уже более никогда не упоминаются (по крайней мере, автору это не известно) в связи с данным принципом.

Сам же принцип двойственности являет собой только положение о равноправии инцидентности точек и прямых.

Между тем (и это очевидно), если на проективной плоскости существует точка $X(x_1 : x_2 : x_3)$, то существует и прямая $T(x_1 : x_2 : x_3)$. Таким образом, возникает смысл исследовать именно координатный принцип двойственности.

В чём суть данного исследования.

Нас будет интересовать, возможно ли, взяв K точек с координатами $X_k(x_{k1} : x_{k2} : x_{k3})$ на проективной плоскости, объединить их в некую конфигурацию K прямыми T_k с такими же координатами $(x_{k1} : x_{k2} : x_{k3})$.

Мы исследуем несколько таких конфигураций, а также рассмотрим некоторые свойства полярных отображений, связанные с координатным принципом двойственности.

2. Вспомогательные леммы.

Определение: **если на проективной плоскости заданы *K* прямых и *K* точек, принадлежащих этим прямым, и для каждой прямой существует координатно-двойственная ей точка, то такую совокупность точек и прямых будем называть координатно-двойственной (КД) конфигурацией.**

Докажем несколько лемм, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 1 (принцип неинцидентности)

Координатно-двойственные точки и прямые никогда не инцидентны.

Доказательство:

Это почти очевидно, т. к. в противном случае уравнение (1) имело бы вид:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

а это невозможно ни при каких условиях, т. к. в проективной геометрии не существует точки с однородными координатами **(0 : 0 : 0)**.

Следовательно, инцидентность невозможна.

Для удобства записи введём обозначение координатно-двойственного соответствия точки и прямой: «$<\equiv>$».

Т. е. запись $A <\equiv> a$ будет обозначать, что точка A координатно-двойственна прямой a.

Лемма 2 (принцип взаимности)

Если $A <\equiv> a$ и $B \in a$, то прямая $b <\equiv> B$ проходит через точку A.

Доказательство:

Пусть прямая a задаётся уравнением:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \qquad (2)$$

и точка $B(b_1 : b_2 : b_3) \in a$, т.е. можем записать:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0, \qquad (3)$$

тогда прямая $b <\equiv> B$ обязательно пройдёт через точку $A(a_1 : a_2 : a_3)$.

Действительно:

Уравнение прямой b имеет вид:

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

и т.к. справедливо (3), заключаем, что прямая b проходит через точку $A(a_1 : a_2 : a_3) <\equiv> a$.

Следствие: **Если на проективной плоскости даны две точки A и B, и, соответственно, координатно-двойственные им прямые a и b, то прямая $AB <\equiv> (a \cap b)$.**

Доказательство:

Проведём через A и B прямую. В силу принципа взаимности координатно-двойственная точка прямой AB должна принадлежать прямой a и одновременно и прямой b. Следовательно, это точка $(a \cap b)$, т.е. $AB <\equiv> (a \cap b)$.

Что и требовалось доказать.

Лемма 3 (о двойственности координатного репера)

Если на проективной плоскости имеется треугольник $A_1 A_2 A_3$, то всегда существует прективный репер, в котором вершины и стороны данного треугольника координатно-двойственны.

Доказательство:

Выберем в качестве репера вершины нашего треугольника $\{A_1 ; A_2 ; A_3\}$, т. е. $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$. Уравнения прямых $A_2 A_3$, $A_1 A_3$, $A_1 A_2$ в этом случае соответственно будут иметь вид:

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = 0; \qquad x_3 = 0,$$

или

$$A_2 A_3 (1:0:0); \qquad A_1 A_3 (0:1:0); \qquad A_1 A_2 (0:0:1).$$

Как видим, стороны треугольника координатно-двойственны соим противоположным вершинам.

Что и требовалось доказать.

3. Исследование (КД) конфигураций.

Теперь приступим к поиску и исследованиям (КД) конфигураций.

Сразу оговоримся. Мы будем рассматривать только такие (КД) конфигурации, где порядок каждой точки (прямой) не ниже второго, т. е. через каждую точку проходят, как минимум, две прямые (и, очевидно, каждой прямой принадлежат, как минимум, две точки).

Введём в наше рассмотрение вспомогательную структуру, отвечающую принципу взаимности и принципу неинцидентности. Такие структуры будем называть таблицами двойственности.

Из приведённого примера будет понятно, как задаются таблицы двойственности.

Пример:

1 - (2, 3, 4)
2 - (1, 3, 5)
3 - (1, 2)
4 - (1, 6)
5 - (2, 6)
6 - (4, 5)

Рис. 1

Структуру из 6-ти элементов, показанную на Рис. 1 будем называть таблицей двойственности 6-го порядка.

Здесь каждому элементу, имеющему обозначения 1, 2, 3, 4, 5, 6, ставится в соответствие набор других элементов (не менее двух), причём это соответствие опирается на такие правила:

1. Сам себе элемент не может быть поставлен в соответствие
2. Если элементу $\boldsymbol{a}$ поставлен в соответствие элемент $\boldsymbol{b}$, в некотором наборе элементов, то и элементу $\boldsymbol{b}$ бедет проставлен в соответствие элемент $\boldsymbol{a}$.
3. Среди всех наборов таблицы, не должно быть ни одной повторяющейся пары элементов.

Т. е., если в одном из наборов имеется пара элементов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то уже более ни в каком из других наборов такой пары не должно встретиться.

Как видим, таблица двойственности (ТД) на рис. 1 отвечает всем этим трём правилам.

Заметим, что правило 1 и правило 2 – это ни что иное, как выражение принципа неинцидентности и принципа взаимности соответственно.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1 **Если в некотором проективном репере $\boldsymbol{R}$ дана точка $\boldsymbol{A}$ и прямая $\boldsymbol{b}$, то существует единственное преобразование проективной плоскости, переводящее репер $\boldsymbol{R}$ в репер $\boldsymbol{R}^*$, в котором $\boldsymbol{A} \Leftarrow\equiv\Rightarrow \boldsymbol{b}$.**

Доказательство:

Пусть прямая $\boldsymbol{b}$ задана точками $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$.

Тогда в репере $\boldsymbol{R}^* \left\{ \boldsymbol{A}; \boldsymbol{B}; \boldsymbol{C} \right\}$, согласно Леммы 3, будем иметь $\boldsymbol{A} \Leftarrow\equiv\Rightarrow \boldsymbol{BC} \equiv \boldsymbol{b}$.

Найдём преобразование проективной плоскости, задаваемое матрицей $\left\| m_{ij} \right\|$, переводящее репер R в репер R^*.

Пусть в репере R точки A, B и C имеют координаты

$$(a_1 : a_2 : a_3); \qquad (b_1 : b_2 : b_3); \qquad (c_1 : c_2 : c_3),$$

соответственно. В репере R^* эти точки будут иметь такие координаты:

$$(1:0:0); \qquad (0:1:0); \qquad (0:0:1),$$

соответственно.

Можем записать следующие уравнения.

$$m_{11}a_1 + m_{12}a_2 + m_{13}a_3 = 1;\ m_{21}a_1 + m_{22}a_2 + m_{23}a_3 = 0;\ m_{31}a_1 + m_{32}a_2 + m_{33}a_3 = 0;$$

$$m_{11}b_1 + m_{12}b_2 + m_{13}b_3 = 0;\ m_{21}b_1 + m_{22}b_2 + m_{23}b_3 = 1;\ m_{31}b_1 + m_{32}b_2 + m_{33}b_3 = 0;$$

$$m_{11}c_1 + m_{12}c_2 + m_{13}c_3 = 0;\ m_{21}c_1 + m_{22}c_2 + m_{23}c_3 = 0;\ m_{31}c_1 + m_{32}c_2 + m_{33}c_3 = 1;$$

Сгруппируем наши уравнения в три системы следующим образом:

$$\begin{cases} m_{11}a_1 + m_{12}a_2 + m_{13}a_3 = 1 \\ m_{11}b_1 + m_{12}b_2 + m_{13}b_3 = 0, \\ m_{11}c_1 + m_{12}c_2 + m_{13}c_3 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} m_{21}a_1 + m_{22}a_2 + m_{23}a_3 = 0 \\ m_{21}b_1 + m_{22}b_2 + m_{23}b_3 = 1, \\ m_{21}c_1 + m_{22}c_2 + m_{23}c_3 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} m_{31}a_1 + m_{32}a_2 + m_{33}a_3 = 0 \\ m_{31}b_1 + m_{32}b_2 + m_{33}b_3 = 0, \\ m_{31}c_1 + m_{32}c_2 + m_{33}c_3 = 1 \end{cases} \tag{6}$$

Замечаем, что для всех трёх систем уравнений (4), (5), (6) главный определитель один и тот же.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

И т. к. точки A, B и C не лежат на одной прямой, то главный определитель системы не равен нулю. Следовательно системы (4), (5) и (6) имеют единственное решение для коэффициентов m_{ij}.

Что и требовалось доказать.

Таблицы двойственности будем использовать как вспомогательный инструмент для поиска (КД) конфигураций. Т. к. и (КД) конфигурации и (ТД) отвечают принципу взаимности и принципу неинцидентности, то, очевидно, что всякой (КД) конфигурации можно поставить в соответствие, по крайней мере, одну таблицу двойственности.

Обратное же не всегда справедливо, т. е. не для всякой (ТД) можно построить (КД) конфигурацию (ниже мы приведём такой пример).

Проблема соответствия (ТД) и (КД) конфигураций может послужить темой отдельного исследования, но мы этим здесь заниматься не будем.

Итак, приступим к описанию некоторых (КД) конфигураций. Как и договорились ранее, будем заниматься только такими конфигурациями, у которых порядок точек и прямых не ниже 2-го.

Как было сказано выше, предметом нашего исследования будет являться составление таблиц двойственности и проверка их на соответствие (КД) конфигурвциям.

Простейшая, интересующая нас, таблица состоит их 3-х элементов и имеет вид:

1 - (2, 3)
2 - (1, 3)
3 - (1, 2)

и ей соответствует простейшая (КД) конфигурация (Рис. 2).

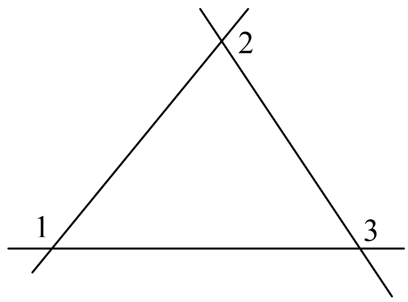


Рис. 2

Действительно, в силу Леммы 3 и Теоремы 1, существует такое преобразование прективной плоскости, что для данного треугольника будет справедлив принцип координатной двойственности.

Оказывается, не существует таблицы двойственности для 4-х элементов порядка 2 и более (надо помним, что мы рассматриваем конфигурации, у которых порядок точек и прямых не менее второго), а следовательно, невозможно построить и (КД) конфигурацию из 4 точек и 4 прямых.

Но из пяти точек уже можно построить две (КД) конфигурации Рис. 3 и Рис. 4. Конфигурацию Рис.3 будем называть кольцом, а конфигурацию Рис 4. – пучком.

Кольцо

1 - (2, 4)
2 - (1, 3)
3 - (2, 5)
4 - (1, 5)
5 - (3, 4)

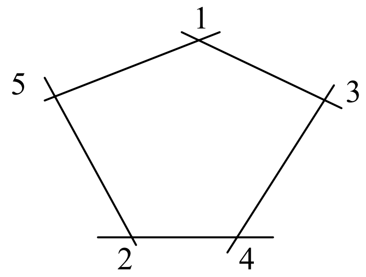


Рис. 3

Пучок

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3)
3 - (1, 2)
4 - (1, 5)
5 - (1, 4)

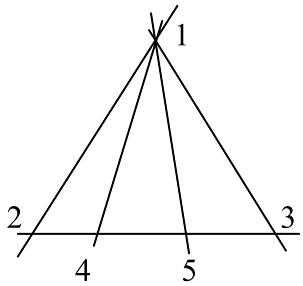


Рис. 4

Найдём координаты точек для таблицы, показанной на рис. 3, а, следовательно, в этом случае мы получаем возможность и построения соответствующей ей (КД) конфигурации.

Пусть 1(1:0:0), 3(1:1:1), тогда уравнение прямой (1, 3) будет иметь вид:

$$(1,3): \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = -\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0},$$

т. е. 2(0:-1:1), т. к. 2<≡> (1, 3).

Пусть $5(\boldsymbol{a}_1 : \boldsymbol{a}_2 : \boldsymbol{a}_3)$, тогда

$$(1,5): \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0},$$

т. е. $4(\mathbf{0} : \boldsymbol{a}_3 : -\boldsymbol{a}_2)$, т. к. 4<≡> (1, 5).

С другой стороны:

$$(2,5):\qquad \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{x}_1(-\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_2)+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=\mathbf{0},$$

т. к. 3 <≡> (2, 5).

Отсюда получаем: $-\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_2=\mathbf{1}$, $\boldsymbol{a}_1=\mathbf{1}$.

Найдём уравнение прямой, соответствующее набору (2, 4).

$$(2,4):\qquad \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a}_3 & \mathbf{-}\boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3)=\mathbf{0},$$

откуда: $\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3=\mathbf{1}$, т. к. 1 <≡> (2, 4).

Объединяя два последних результата, получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} -\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3=\mathbf{1} \\ \boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3=\mathbf{1} \end{cases},$$

из решения которой получаем: $a_2=0,\ \ a_3=-1$.

Окончательно:

1(1:0:0), 2(0:-1:1), 3(1:1:1), 4(0:1:0), 5(1:0:-1).

Теперь найдём координаты точек для таблицы, показанной на рис. 4.

Выберем в качестве координатного репера точки $\{1,2,3\}$, т. е. 1(1:0:0), 2(0:1:0), 3(0:0:1). Тогда прямая (2, 3) будет иметь уравнение: $x_1=0$ и т. к. $\mathbf{4}\in\mathbf{(2,3)}$, то можем положить, не нарушая общности 4(0:1:a).

Найдём уравнение прямой (1, 4).

$$(1,4):\qquad \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_2=\mathbf{0},$$

и т. к.5 <≡> (1, 4), то 5(0:-a:1).

Окончательно:

1(1:0:0), 2(0:1:0), 3(0:0:1), 4(0:1: a), 5(0:- a:1).

Выясним при каком $\boldsymbol{a}$ наши точки 2, 4, 5 и 3 будут гармонически сопряжены, т.е. должно выполняться равенство:

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1+a^2} = -1,$$

откуда получаем: $a = \pm i\sqrt{2}$.

В какой бы последовательности мы не располагали наши точки 2, 4, 5, 3 и как бы не меняли их местами, мы всегда будем получать мнимое значение величины a. Т.о. гармоническое сопряжение 4-х точек, расположенных на одной прямой, для (КД) конфигурации, показанной на Рис. 4, невозможно в действительной, но возможно в мнимой проективной плоскости.

Рассмотрим конфигурации, состоящие из 6-ти точек. Нам удалось найти четыре таблицы двойственности.

1 - (2, 3, 4)
2 - (1, 3, 5)
3 - (1, 2)
4 - (1, 6)
5 - (2, 6)
6 - (4, 5)

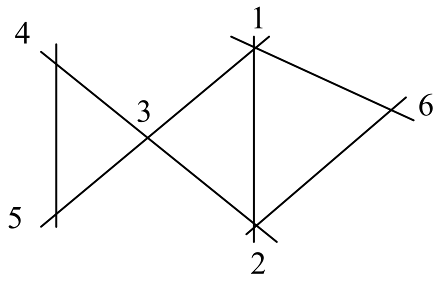


Рис. 5

1 - (2, 3, 4)
2 - (1, 3)
3 - (1, 2)
4 - (1, 5, 6)
5 - (4, 6)
6 - (4, 5)

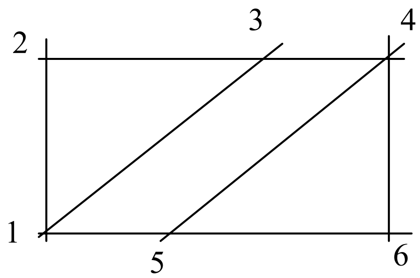


Рис. 6

1 - (2, 6)
2 - (1, 3)
3 - (2, 4)
4 - (3, 5)
5 - (4, 6)
6 - (1, 5)

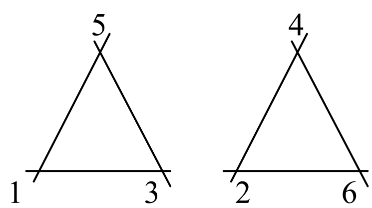


Рис. 7

1 - (3, 5)
2 - (4, 6)
3 - (1, 5)
4 - (2, 6)
5 - (1, 3)
6 - (2, 4)

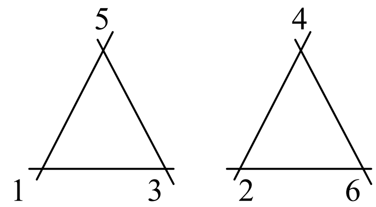


Рис. 8

На Рис. 7 и рис. 8 мы видим распадающиеся (КД) конфигурации. Разница этих (КД) конфигураций в том, что на Рис. 8 мы имеем два координатно-двойственных трёхвершинника, а на Рис. 7 ни одного, т. к. здесь вершины одного трёхвершинника координато-двойственны сторонам другого и наоборот.

Конфигурацию, показанную на Рис. 8, будем называть **несобственной**, т. к. по сути дела это ни что иное, как объединение двух трёхточечных конфигураций. Все предыдущие конфигурации, кроме последней, назовём **собственными.**

На примере (КД) конфигураций, состоящих из пяти точек и прямых, мы показали, как вычисляются координаты их точек, поэтому нет необходимости проделывать такие вычисления для всех подряд, найденных конфигураций. В дальнейшем мы приведём ещё несколько примеров таких вычислений, для случаев, которые находим особенно интересными.

С увеличением числа точек число (КД) конфигураций начинает резко расти. Для 7-ми точек нам удалось найти 8 (ТД) и соответствующие им (КД) конфигурации. Покажем их здесь.

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3, 6, 7)
3 - (1, 2)
4 - (1, 5)
5 - (1, 4)
6 - (2, 7)
7 - (2, 6)

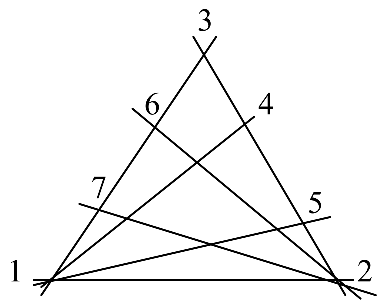


Рис. 9

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3)
3 - (1, 2, 6)
4 - (1, 5, 7)
5 - (1, 4)
6 - (3, 7)
7 - (4, 6)

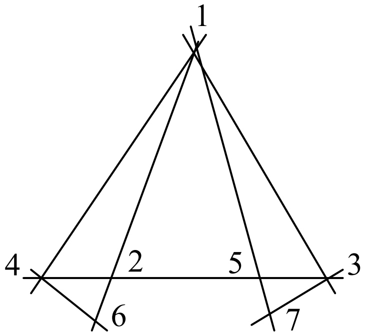


Рис. 10

1 - (2, 4)
2 - (1, 3)
3 - (2, 6)
4 - (1, 5)
5 - (4, 7)
6 - (3, 7)
7 - (5, 6)

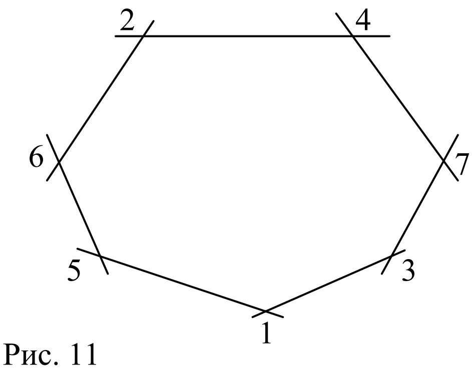


Рис. 11

1 - (2, 3, 4)
2 - (1, 3, 5)
3 - (1, 2)
4 - (1, 7)
5 - (2, 6)
6 - (5, 7)
7 - (4, 6)

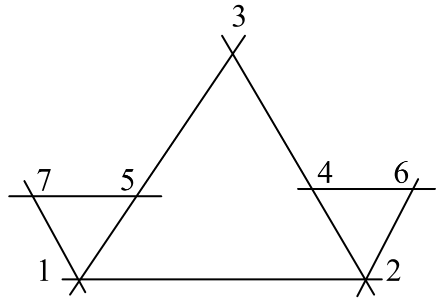


Рис. 12

1 - (2, 3, 4)
2 - (1, 3, 5)
3 - (1, 2)
4 - (1, 7)
5 - (2, 6, 7)
6 - (5, 7)
7 - (4, 5, 6)

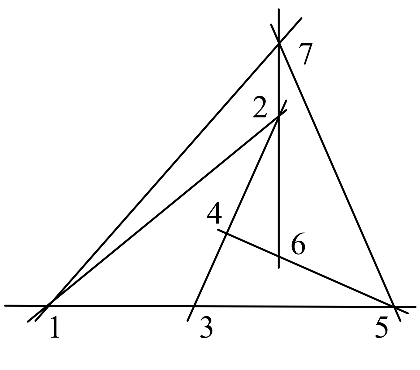


Рис. 13

1 - (2, 3, 4, 5, 6, 7)
2 - (1, 3)
3 - (1, 2)
4 - (1, 5)
5 - (1, 4)
6 - (1, 7)
7 - (1, 6)

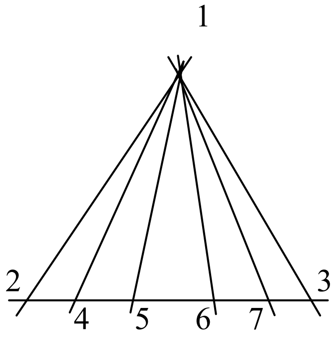


Рис. 14

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3)
3 - (1, 2)
4 - (1, 6)
5 - (1, 7)
6 - (4, 7)
7 - (5, 6)

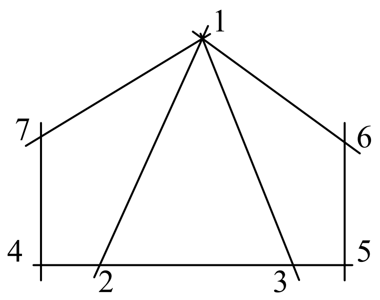


Рис. 15

1 - (2, 3, 4)
2 - (1, 3, 5)
3 - (1, 2, 6)
4 - (1, 7)
5 - (2, 7)
6 - (3, 7)
7 - (4, 5, 6)

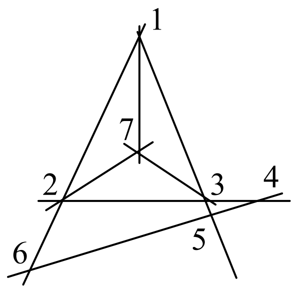


Рис. 16

Для 8-ми точек и прямых было найдено 10 (КД) конфигурвций, две из которых несобственные (Рис.25, Рис. 26), но мы не утверждаем, что найдены все возможные конфигурации. Покажем их здесь вместе с соответствующими таблицами двойственности.

1 - (2, 3, 4, 5, 6)
2 - (1, 3, 7)
3 - (1, 2)
4 - (1, 5)
5 - (1, 4)
6 - (1, 8)
7 - (2, 8)
8 - (6, 7)

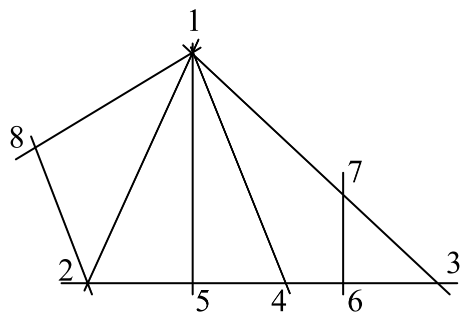


Рис. 17

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3, 6)
3 - (1, 2, 7)
4 - (1, 5)
5 - (1, 4)
6 - (2, 8)
7 - (3, 8)
8 - (6, 7)

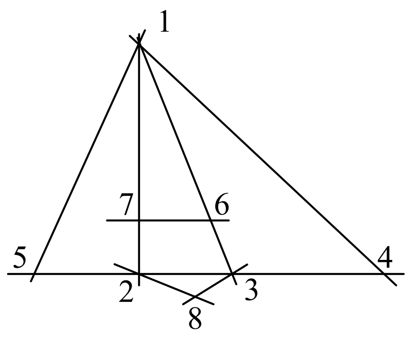


Рис. 18

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3, 6)
3 - (1, 2, 7)
4 - (1, 5, 8)
5 - (1, 4)
6 - (2, 8)
7 - (3, 8)
8 - (4, 6, 7)

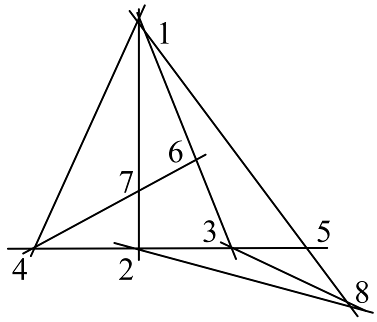


Рис. 19

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3, 6, 7)
3 - (1, 2)
4 - (1, 5, 8)
5 - (1, 4)
6 - (2, 7, 8)
7 - (2, 6)
8 - (4, 6)

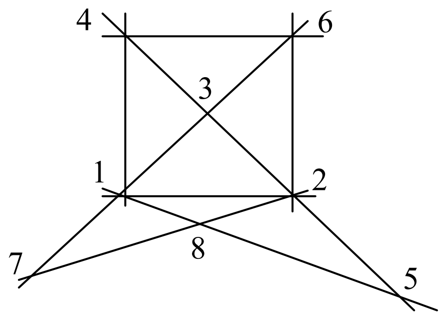


Рис. 20

1 - (2, 3, 4)
2 - (1, 3, 5)
3 - (1, 2, 6)
4 - (1, 7, 8)
5 - (2, 8)
6 - (3, 7)
7 - (4, 6)
8 - (4, 5)

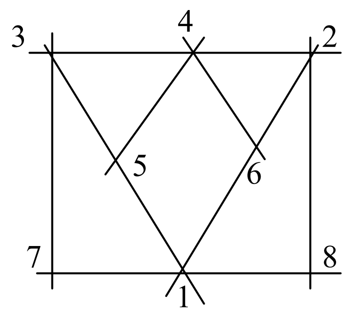


Рис. 21

1 - (2, 3, 4)
2 - (1, 3, 5)
3 - (1, 2, 6)
4 - (1, 7, 8)
5 - (2, 8)
6 - (3, 7)
7 - (4, 6, 8)
8 - (4, 5, 7)

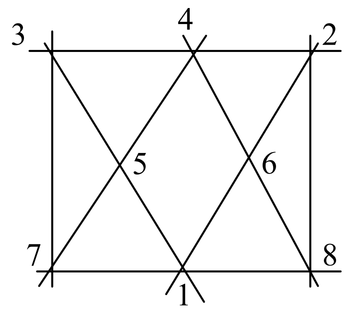


Рис. 22

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3)
3 - (1, 2)
4 - (1, 6)
5 - (1, 7)
6 - (4, 8)
7 - (5, 8)
8 - (6, 7)

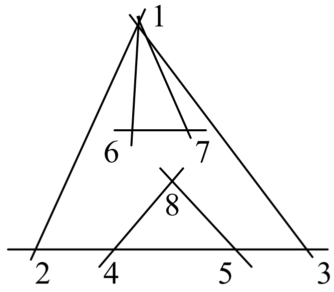


Рис. 23

1 - (2, 3)
2 - (1, 4)
3 - (1, 5)
4 - (2, 6)
5 - (3, 7)
6 - (4, 8)
7 - (5, 8)
8 - (6, 7)

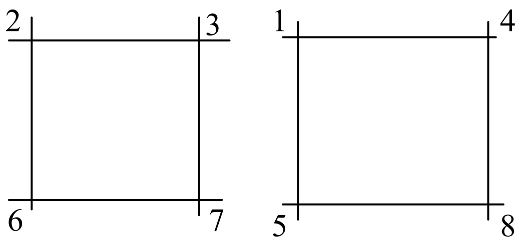


Рис. 24

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3)
3 - (1, 2)
4 - (1, 5)
5 - (1, 4)
6 - (7, 8)
7 - (6, 8)
8 - (6, 7)

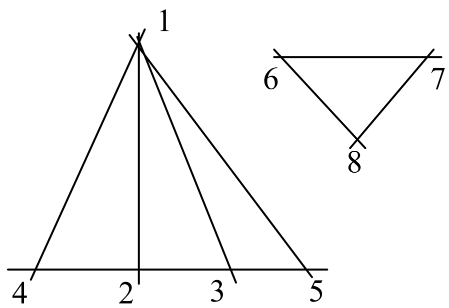


Рис. 25

1 - (2, 4)
2 - (1, 3)
3 - (2, 5)
4 - (1, 5)
5 - (3, 4)
6 - (7, 8)
7 - (6, 8)
8 - (6, 7)

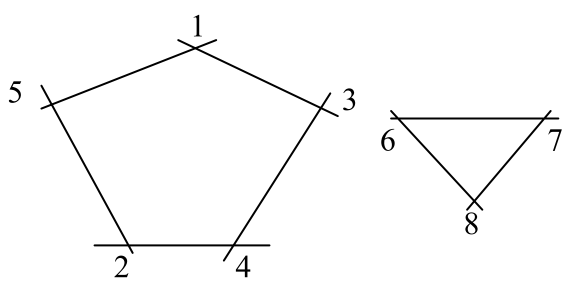


Рис. 26

Интересен случай, показанный на Рис. 24, где (КД) конфигурация представлена двумя четырёхвершинниками. Мы помним, что (КД) конфигураций из четырёх точек и прямых (порядка 2 и выше) не существует. И действительно, в нашем случае вершины одного четырёхвершинника координатно-двойственны сторонам другого и наоборот.

Девятиточечных (КД) конфигураций нами найдено 19, четыре из которых являются несобственными. Все найденные конфигурации и их (ТД) мы покажем в приложении. Отдельно заметим, что известная конфигурация Паппа (она также состоит из 9 точек и 9 прямых) не отвечает принципам построения (КД) конфигураций, т. е. не является таковой.

В качестве краткого резюме заметим, что (КД) конфигурации «кольцо» и «пучок» возможны только для конфигураций с нечётным числом точек и прямых.

Мы не будем в данной работе заниматься поиском 10-точечных конфигураций, но покажем несколько, на наш взгляд, интересных теорем, связанных с этими конфигурациями.

Теорема 2 Конфигурация Дезарга является (КД) конфигурацией.

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, построим соответствующую конфигурации Дезарга таблицу двойственности. Такая таблица действительно возможна.

1 - (2, 3, 4)
2 - (1, 3, 5)
3 - (1, 2, 6)
4 - (1, 7, 8)
5 - (2, 7, 9)
6 - (3, 7, 10)
7 - (4, 5, 6)
8 - (4, 9, 10)
9 - (5, 8, 10)
10 - (6, 8, 9)

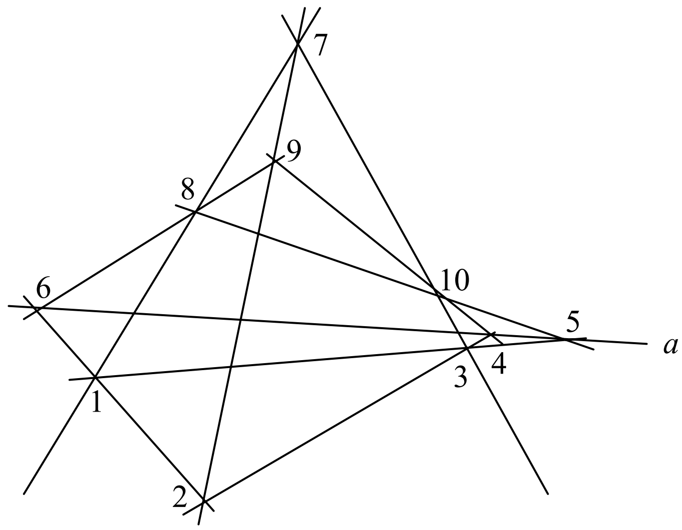


Рис. 27

Доказательство:

Для доказательства теоремы достаточно найти хотя бы один конкретный случай координат всех точек и прямых в выбранном репере, для которого справедлив координатный принцип двойственности.

Выберем в качестве репера четвёрку точек $\{\mathbf{1, 2, 3, 7}\}$, где 1(1:0:0), 2(0:1:0), 3(0:0:1), 7(1:1:1).

Построим в заданном репере прямую $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, координатно-двойственную точке 7. Такая прямая существует и построить её не трудно.

Найдём точки пересечения данной прямой со сторонами координатного репера. Т. е. будем искать координаты точек: $\mathbf{6 \equiv (1, 2) \cap \boldsymbol{a}}$, $\mathbf{5 \equiv (1, 3) \cap \boldsymbol{a}}$, $\mathbf{4 \equiv (2, 3) \cap \boldsymbol{a}}$.

Координаты точки 6 находим из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Получаем 6(-1:1:0).

Аналогично находим координаты и других точек: 5(1:0:-1), 4(0:-1:1).

Найдём уравнения прямых (1, 7), (2, 7), (3, 7).

$$(1,\ 7): \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x_2 + x_3 = 0 \text{ или } (1,\ 7)\text{: } (0:-1:1).$$

Аналогично получаем: (2, 7): (1:0:-1) и (3, 7): (-1:1:0).

Как видим, (1, 7) $<\equiv>$ 4, (2, 7) $<\equiv>$ 5, (3, 7) $<\equiv>$ 6.

Для того чтобы данная конфигурация отвечала принципу координатной двойственности остаётся доказать, что 10 $<\equiv>$ (8, 9), 9 $<\equiv>$ (8, 10), 8 $<\equiv>$ (9, 10), т. к. в силу Леммы 3, координатный репер уже является координатно-двойственным трёхвершинником и по построению 7 $<\equiv>$ $\boldsymbol{a} \equiv$ (4, 5, 6).

Точка $\mathbf{8 \in (1, 7)}$, т. е. без ущерба для общности, можем записать её координаты в виде: $(1:n:n)$. Точка $9 \in (2,\ 7)$ и должна иметь координаты, которые можно записать в общем виде $(n:m:n)$.

Найдём уравнение прямой (8, 9)

$$(8,\ 9): \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & n & n \\ n & m & n \end{vmatrix} = x_1\left(n^2 - mn\right) + x_2\left(n^2 - n\right) + x_3\left(m - n^2\right) = 0$$

Точка $10 \in (3,\ 7)$, т. е. её координаты в общем виде можем записать: $10(n:n:k)$. Т. к. мы ищем точку 10 $<\equiv>$ (8, 9), то справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{cases} n^2 - mn = bn \\ n^2 - n = bn \\ m - n = bk \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} n - m = b \\ n - 1 = b \\ m - n = bk \end{cases}$$

Глядя на первое и второе уравнения сразу можем заключить, что $m = 1$. Подставим b в третье уравнение, получим:

$$1 - n^2 = bk = (n-1)k,$$

$$(1-n)(1+n) = -(1-n)k,$$

$$k = -(1+n). \qquad (7)$$

Теперь найдём уравнение прямой (9, 10).

$$(9,\ 10):\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ n & m & n \\ n & n & k \end{vmatrix} = x_1\left(mk - n^2\right) + x_2\left(n^2 - nk\right) + x_3\left(n^2 - nm\right) = 0$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие: $8 \Leftarrow\equiv\Rightarrow (9,\ 10)$. Тогда получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} mk - n^2 = 1 \\ n^2 - nk = cn \\ n^2 - mn = cn \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} mk - n^2 = 1 \\ n - k = c \\ n - m = c \end{cases}.$$

Отсюда сразу видим, что $k = m$. А ранее было установлено, что m = 1, следовательно и $k = 1$. И подставляя в (7), находим единственное решение, при котором трёхвершинник 8, 9, 10 будет координатно-двойственным для выбранного репера. Получаем такие координаты точек:

8(1:-2:-2), 9(-2:1:-2), 10(-2:-2:1).

Этим теорема доказана, т. к. нам необходимо было найти хотя бы один частный случай координатно-двойственных точек и прямых для конфигурации Дезарга.

Рассмотрим ещё одну известную конфигурацию проективной геометрии рис. 28. Для этой конфигурации также существует таблица двойственности.

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3, 6, 7)
3 - (1, 2, 8)
4 - (1, 5, 9)
5 - (1, 4, 10)
6 - (2, 7, 9)
7 - (2, 6, 10)
8 - (3, 9, 10)
9 - (4, 6, 8)
10 - (5, 7, 8)

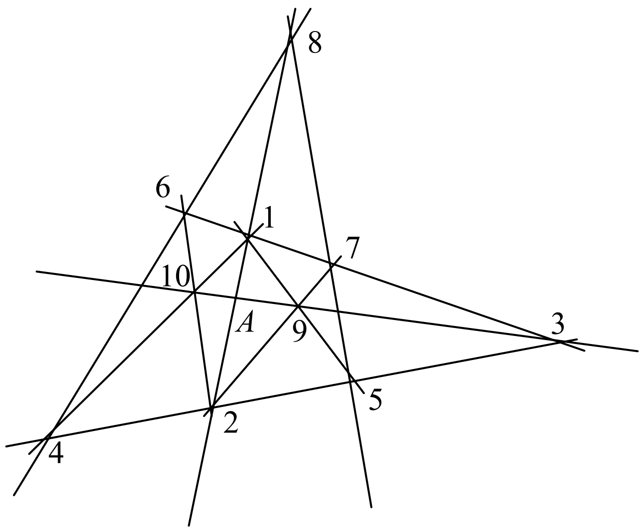


Рис. 28

Справедлива следующая

Теорема 3 Конфигурация Рис. 28 является (КД) конфигурвцией.

Доказательство:

Конфигурация на Рис. 28 – это ни что иное, как стилизованная конфигурация Дезарга. Здесь перспективными являются треугольники 1, 4, 5 и 2, 6, 7. Центром перспективы является точка 8, а осью перспективы – прямая (3, 9, 10). Но, как видим, здесь есть особенности, а именно: точка $1 \in (7,\ 6)$ и точка $2 \in (4,\ 5)$. И поэтому выбор координатного репера должен быть отличным от того, как мы выбирали его при доказательстве Теоремы 2, ибо в том случае мы получили единственное построение, а конфигурации Рис. 27 и Рис. 28 в общем-то различны принципиально, т. к. в последней есть точки и прямые 4-го порядка.

Выберем в качестве проективного репера точки $\{\boldsymbol{A}, \mathbf{3}, \mathbf{8}, \mathbf{4}\}$, где A(1:0:0), 3(0:1:0), 8(0:0:1) и 4(1:1:1). Заметим, что точка A не принадлежит нашей конфигурации. Точка 8 <≡> (3, 9, 10), а точка 3 <≡> (1, 2, 8), в соответствии с Леммой 3. Рассмотрим прямую (1, 5, 9) <≡> 4. Вычислим координаты точек $1 \equiv (1,\ 5,\ 9) \cap (1,\ 2,\ 8)$ и $9 \equiv (1,\ 5,\ 9) \cap (3,\ 9,\ 10)$. Координаты точки 1 находим из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_2 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = 0} \end{cases}$$

Получаем: 1(-1:0:1).

Аналогично находим координаты точки 9(-1:1:0).

Найдём уравнение прямой (3, 4)

(3, 4): $$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \boldsymbol{-x_1 + x_3 = 0}$$ или (3, 4): (-1:0:1), т. е. 1 <≡> (3, 4).

Это соответствует таблице двойственности.

Определим координаты точки $5 \equiv (3,\ 4) \cap (1,\ 9)$. Для этого решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{-x_1 + x_3 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = 0} \end{cases}$$

Получаем: 5(1:-2:1).

Аналогично, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_2 = 0} \\ \boldsymbol{-x_1 + x_3 = 0} \end{cases},$$

находим координаты точки 2(1:0:1).

Следующим шагом найдём уравнения прямых (2, 9) и (1, 3).

Для (2, 9) имеем: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = -\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} = \mathbf{0}$ или (2, 9): (1:1:-1).

Для (1, 3) имеем: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = -\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_3} = \mathbf{0}$ или (1, 3): (1:0:1).

Как видим $2 \Leftarrow\!\equiv\!\Rightarrow (1, 3)$.

Теперь найдём уравнение прямой (4, 8).

(4, 8) имеем: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} = \mathbf{0}$ или (4, 8): (-1:1:0). Т. о. $9 \Leftarrow\!\equiv\!\Rightarrow (4, 8)$.

Вычислим координаты точки 6.

$$6: \quad \begin{cases} \boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_3} = \mathbf{0} \end{cases},$$

получаем: $6(1:1:-1) \Leftarrow\!\equiv\!\Rightarrow (2, 9)$.

Нам осталось определить координаты точек 7 и 10. Глядя на таблицу двойственности, предполагаем, что $7 \Leftarrow\!\equiv\!\Rightarrow (2, 6, 10)$. Точки 2 и 6 известны. Находим уравнение прямой (2, 6).

(2, 6): $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{x_1} - \mathbf{2}\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_3} = \mathbf{0}$, (2, 6): (1:-2:-1).

Теперь вычислим координаты точки $7 \equiv (1, 3) \cap (2, 9)$

$$7: \quad \begin{cases} -\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} = \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_3} = \mathbf{0} \end{cases},$$

получаем: 7(1:-2:-1), т. е. действительно $7 \Leftarrow\!\equiv\!\Rightarrow (2, 6, 10)$.

Аналогично рассуждая, убеждаемся, что и точка 10 координатно-двойственна прямой (5, 7, 8).

Координатная двойственность данной конфигурации установлена, следовательно Теорема 3 доказана, т. к. для доказательства, как и в предыдущем случае, необходимо было найти хотя бы один частный случай.

И в заключение этого раздела рассмотрим ещё одну теорему.

Теорема 4 Если четыре точки одной прямой дважды перспективны четырём точкам другой прямой, то данная конфигурация является координатно-двойственной.

Описанная конфигурация может иметь только такой вид, как на Рис. 29, и для неё существует таблица двойственности.

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3, 6)
3 - (1, 2, 7)
4 - (1, 5, 8)
5 - (1, 4, 9)
6 - (2, 8, 10)
7 - (3, 9, 10)
8 - (4, 6, 10)
9 - (5, 7, 10)
10 - (6, 7, 8, 9)

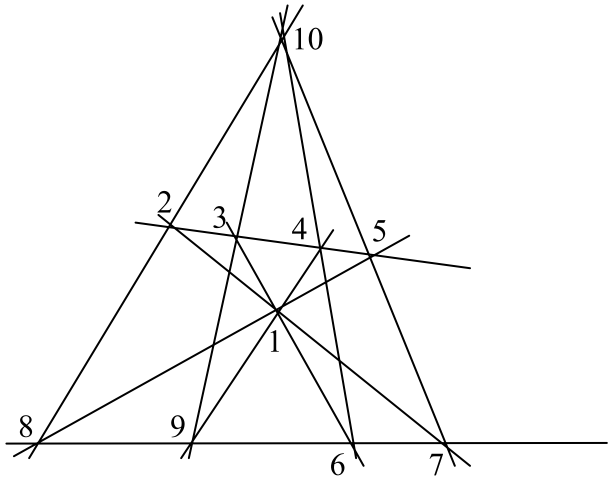


Рис. 29

Точно также, для доказательства теоремы достаточно вычислить (подобрать хотя бы один частный случай) координаты точек и прямых данной конфигурации и убедиться, что она действительно (КД) конфигурация.

В конфигурации Дезарга (Рис. 27) мы имеем два координатно-двойственных треугольника. В конфигурации Теоремы 3 (Рис. 28) уже было три координатно-двойственных треугольника. Действительно, это треугольники: 1, 2, 3; 2, 6, 7 и 1, 4, 5. Это усложняло поиск конкретного примера для координат точек и прямых.

В последнем же случае (Рис. 29) мы имеем уже четыре координатно-двойственных треугольника: 1, 2, 3; 1, 4, 5; 6, 8, 10 и 7, 9, 10.

Поэтому предварительно решим в общем виде задачу поиска координат точек координатно-двойственного треугольника.

Пусть $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ - координатно-двойственный треугольник, где $\boldsymbol{A}(\mathbf{1}:\boldsymbol{m}:\boldsymbol{n})$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}:\mathbf{1}:\boldsymbol{t})$.

Найдём уравнение прямой (***AB***).

$$(A\ B):\qquad \begin{vmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{m} & \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{k} & \mathbf{1} & \boldsymbol{t} \end{vmatrix} = \boldsymbol{x_1}(\boldsymbol{mt}-\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{x_2}(\boldsymbol{kn}-\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{x_3}(\mathbf{1}-\boldsymbol{km}) = \mathbf{0}.$$

Т. к. $C \Longleftrightarrow (A\ B)$, то можем записать для $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{mt}-\boldsymbol{n}:\boldsymbol{kn}-\boldsymbol{t}:\mathbf{1}-\boldsymbol{km})$.

Теперь найдём уравнение прямой (***BC***).

$$(BC): \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ mt-n & kn-t & 1-km \\ k & 1 & t \end{vmatrix} = .$$

$$= x_1(t(kn-t)-(1-km)) + x_2(k(1-km)-t(mt-n)) + x_3(mt-n-k(kn-t)) = 0$$

И в силу того, что $A <\equiv> (BC)$, можем составить такую систему уравнений:

$$\begin{cases} tkn - t^2 - 1 + km = b \\ k - k^2m - t^2m + tn = bm \\ mt - n - k^2n + kt = bn \end{cases}. \qquad (8)$$

Подставим b из первого уравнения во второе, получим:

$$k - mk^2 - mt^2 + tn = mtkn - mt^2 - m + km^2,$$

$$(k+m) - km(k+m) + tn(1-km) = 0,$$

$$(k+m)(1-km) + tn(1-km) = 0,$$

$$(1-km)(k+m+tn) = 0.$$

Отсюда получаем два решения:

1). $1 - km = 0,$

2). $k + m + tn = 0.$

Теперь подставим b в третье уравнение системы (8), получим.

$$mt - n - k^2n + kt = tkn^2 - t^2n - n + kmn,$$

$$m(t-kn) + k(t-kn) + tn(t-kn) = 0,$$

$$(t-kn)(m+k+tn) = 0.$$

Снова получаем два решения:

1). $t - kn = 0,$

2). $k + m + tn = 0.$

Если выразить $\boldsymbol{b}$ из второго уравнения и затем подставить в третье, то после элементарных преобразований мы снова получаем два решения:

1). $\boldsymbol{mt - n = 0,}$

2). $\boldsymbol{k + m + tn = 0.}$

Как видим, решение $\boldsymbol{k + m + tn = 0}$ удовлетворяет системе уравнений (8) во всех трёх случаях.

Т. о. выражение

$$\boldsymbol{k + m + tn = 0.} \tag{9}$$

мы будет рассматривать как один из критериев при исследовании координатно-двойственных треугольников.

Теперь приступим к доказательству Теоремы 4. Для доказательства достаточно будет показать хотя бы один частный случай координат точек конфигурации (Рис. 27), удовлетворящий координатно-двойственным принципам.

Доказательство:

Выберем координатный репер $\left\{\boldsymbol{10, 8, 6}\right\}$, где 10(1:0:0), 8(0:1:0), 6(0:0:1), т. е. для данного репера, как для координатно-двойственного треугольника будем иметь:

$$\boldsymbol{m = n = k = t = 0}.$$

Это не противоречит критерию (9).

Рассмотрим треугольник 10, 9, 7. Он также, согласно таблицы двойственности, должен быть координатно-двойственным.

Пусть 10(1:$\boldsymbol{m : n)}$, 9$\boldsymbol{(k : 1 : t)}$, 7$\boldsymbol{(mt - n : kn - t : 1 - km)}$, но точка 10 уже выбрана конкретно, где $\boldsymbol{m = n = 0}$, тогда точка 7 будет иметь координаты: $\boldsymbol{(0 : -t : 1)}$, и из соотношения $\boldsymbol{k + m + tn = 0}$ получаем, что и $\boldsymbol{k = 0}$.

Простейший случай координат для точек 7 и 9 получаем при $t = 1$, т. е. 7(0:-1:1), 9(0:1:1).

Теперь рассмотрим треугольник 1, 2, 3. Он также должен быть координатно-двойственным.

Пусть 1(1: p : q), 2(r :1: s), 3($\boldsymbol{ps - q : rq - s : 1 - pr)}$.

Т. к. точка 2$\in$(8, 10) $\equiv$ (0:0:1), то получаем, что s = 0. Т. е. 2(r :1:0), 3(- q : rs :1- pr).

Найдём уравнение прямой (1, 8).

$$(1, 8): \qquad \begin{vmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = \boldsymbol{-x_1 q + x_3 = 0},$$

и т. (1, 8) <≡> 4, можем записать: 4(q :0:-1).

Точки 2, 3, 4 должны лежать на одной прямой, поэтому

$$\begin{vmatrix} q & 0 & -1 \\ r & 1 & 0 \\ -q & qr & 1-pr \end{vmatrix} = q - qpr - qr^2 - q = -qr(p+r) = 0.$$

Отсюда заключаем, что $p = -r$.

Точки 1, 4, 9 также лежат на одной прямой.

$$\begin{vmatrix} q & 0 & -1 \\ 1 & p & q \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = pq - 1 - q^2 = 0. \qquad (10)$$

Найдём уравнение прямой (4, 9).

$$(4, 9): \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ q & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_1 - qx_2 + qx_3 = 0,$$

и т. к. (4, 9) <≡> 5, то можем записать 5(1:- $q : q$).

Найдём уравнение прямой (4, 5).

$$(4, 5): \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -q & q \\ q & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_1 q - x_2\left(q^2 + 1\right) + x_3 q^2 = 0.$$

Точка 1 <≡> (4, 5), получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} q = \nu \\ q^2 + 1 = \nu p \\ q^2 = \nu q \end{cases} \qquad \text{или} \qquad pq - 1 - q^2 = 0.$$

Это выражение мы уже получали ранее – (10). Положим здесь p = 2, тогда получаем $(q-1)^2 = 0$, откуда: q = 1 и т. к. $p = -r$, то r = -2.

Выпишем окончательно координаты точек данной конфигурации для этого частного случая.

1(1:2:1); 2(-2:1:0); 3(-1:-2:5); 4(1:0:-1); 5(1:-1:1);

6(0:0:1); 7(0:-1:1); 8(0:1:0); 9(0:1:1); 10(1:0:0).

Теорема доказана, т. к. нам надо было найти хотя бы один частный случай, что мы и сделали.

Заметим, что в Теореме 2 нам удалось подобрать координаты точек так, что в конфигурации полностью присутствует координатный репер (четыре точки).

В последних же случаях, для Теоремы 3 и Теоремы 4 нам этого сделать не удалось. Действительно, в конфигурации (Рис. 28) точка $A(1{:}0{:}0)$ не принадлежит данной конфигурации. Если в данной конфигурации провести прямую (3, 8)$<\equiv>$ A, то получим новую конфигурацию из 11 точек и прямых.

Для конфигурации Теоремы 4 (Рис. 29) нам не удалось найти конкретного примера, чтобы присутствовала единичная точка (1:1:1).

Может быть заинтересованный читатель найдёт такие конкретные случаи, где будет в конфигурациях присутствовать полный проективный репер, или докажет, что для данных конфигураций это невозможно.

В заключение к этому разделу покажем таблицу двойственности из 11 элементов, для которой невозможно построить (КД) конфигурацию. По крайней мере, автору этого сделать не удалось.

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3, 6, 7)
3 - (1, 2, 8, 9)
4 - (1, 5, 10)
5 - (1, 4, 11)
6 - (2, 7, 10)
7 - (2, 6, 11)
8 - (3, 9, 10)
9 - (3, 8, 11)
10 - (4, 6, 8)
11 - (5, 7, 9)

4. Инварианты координатно-двойственного принципа.

Докажем следующую теорему.

Теорема 5 (о неподвижной точке)

Если проективное преобразование плоскости задано матрицей

$$\boldsymbol{g} = \left\| g_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{matrix} \right\|,$$

где элементы g_{ij} определяют некоторую произвольную конику, то для всякой неподвижной точки данного преобразования и её поляры справедлив координатный принцип двойственности.

Доказательство:

Проективное преобразование плоскости в общем виде задаётся таким образом:

$$\begin{aligned} ax_1^* &= g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + g_{13}x_3 \\ ax_2^* &= g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + g_{23}x_3 \, . \\ ax_3^* &= g_{31}x_1 + g_{32}x_2 + g_{33}x_3 \end{aligned} \tag{11}$$

Т. к. элементы g_{ij} определяют конику, то $g_{ij} = g_{ji}$.

Пусть дана некоторая точка $P(p_1 : p_2 : p_3)$. Запишем условия неподвижности для нашей точки при преобразовании (11).

$$\begin{aligned} ap_1 &= g_{11}p_1 + g_{12}p_2 + g_{13}p_3 \\ ap_2 &= g_{21}p_1 + g_{22}p_2 + g_{23}p_3 \, . \\ ap_3 &= g_{31}p_1 + g_{32}p_2 + g_{33}p_3 \end{aligned} \tag{12}$$

Наше преобразование задано произвольной коникой, определяемой коэффициентами g_{ij}. Найдём уравнение поляры точки $P(p_1 : p_2 : p_3)$.

$$g_{11}p_1x_1 + g_{22}p_2x_2 + g_{33}p_3x_3 + g_{12}(p_1x_2 + p_2x_1) + g_{13}(p_1x_3 + p_3x_1) + g_{23}(p_3x_2 + p_2x_3) =$$

$$= x_1(g_{11}p_1 + g_{12}p_2 + g_{13}p_3) + x_2(g_{12}p_1 + g_{22}p_2 + g_{23}p_3) + x_3(g_{13}p_1 + g_{23}p_2 + g_{33}p_3) = 0 \, .$$

Запишем условия координатного принципа двойственности точки $P(p_1 : p_2 : p_3)$ и её поляры, уравнение которой мы только что показали.

$$\begin{aligned} ap_1 &= g_{11}p_1 + g_{12}p_2 + g_{13}p_3 \\ ap_2 &= g_{21}p_1 + g_{22}p_2 + g_{23}p_3 \, . \\ ap_3 &= g_{31}p_1 + g_{32}p_2 + g_{33}p_3 \end{aligned} \tag{13}$$

Как видим, условия неподвижности (12) в точности совпадают с условиями координатной двойственности (13), т. е. всякая неподвижная точка данного преобразования координатно-двойственна своей полчре.

Что и требовалось доказать.

Справедлива также обратная теорема.

Теорема 6 **Если проективное преобразование задано произвольной коникой, и для данного полюса и поляры справедлив координатный принцип двойственности, то полюс – неподвижная точка данного преобразования.**

Теорема доказывается аналогично прямой теореме, только весь ход рассуждений необходимо проделать в обратном порядке.

Рассмотрим пример координатно-двойственной конфигурации Дезарга с неподвижными точками проективного преобразования, заданного некоторой коникой.

Вспомним двойственную теорему «о поляре треугольника» (см. работу автора «Теоремы проективной геометрии»). Формулировка её такова:

Если дан произвольный треугольник и произвольная коника, то прямые, проходящие через вершины треугольника и полюсы противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

Дадим определение.

Определение: **Автополярной будем называть конфигурацию, состоящую из** n **точек (полюсов) и** n **прямых (соответствующих полюсам поляр).**

Вернёмся к формулировке обратной теоремы «о поляре треугольника».

Другими словами, вершины данного треугольника и полюсы противоположных сторон образуют автополчрную конфигурацию Дезарга, где центром перспективы является полюс данного треугольника, а осью перспективы – поляра данного треугольника (понятия полюса и поляры треугольника даются в тойже работе автора «Теоремы проективной геометрии»).

Обозначим данный треугольник $\boldsymbol{A_1 A_2 A_3}$, а треугольник полюсов прямых $\boldsymbol{A_2 A_3}$, $\boldsymbol{A_1 A_3}$, $\boldsymbol{A_1 A_2}$ соответственно $\boldsymbol{P_1 P_2 P_3}$. Через $\boldsymbol{S}$ будем обозначать полюс треугольника $\boldsymbol{A_1 A_2 A_3}$, а поляру треугольника – через $\boldsymbol{l}$.

Уравнение коники в общем случае имеет вид:

$$\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i x_j = 0, \text{ где } g_{ij} = g_{ji}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7 **Автополярная (КД) конфигурация Дезарга, относительно некоторой коники, есть инвариант проективного преобразования плоскости, заданного данной коникой.**

Доказательство:

Итак, имеем (КД) конфигурацию Дезарга. Введём координатный репер $\left\{ \boldsymbol{A_1, A_2, A_3, S} \right\}$, т. е. $\boldsymbol{A_1}$ (1:0:0), $\boldsymbol{A_2}$ (0:1:0), $\boldsymbol{A_3}$ (0:0:1), $\boldsymbol{S}$(1:1:1). Тогда, как было доказано ранее, треугольник $\boldsymbol{P_1 P_2 P_3}$, перспективный данному, будет иметь координаты вершин:

$$\boldsymbol{P_1}\ (1{:}-2{:}-2); \quad \boldsymbol{P_2}\ (-2{:}1{:}-2); \quad P_3\ (-2{:}-2{:}1).$$

Найдём коэффициенты g_{ij} коники, при которых выполнялось бы условие теоремы «о поляре треугольника».

В силу этой теоремы, прямая $\boldsymbol{P_1 P_2}$ является полярой точки $\boldsymbol{A_3}$, уравнение которой имеет вид (см. работу автора «Теоремы проективной геометрии»):

$$\boldsymbol{g_{13} x_1 + g_{23} x_2 + g_{33} x_3 = 0}.$$

С другой стороны, в силу того, что конфигурация Дезарга является координатно-двойственной, прямая $P_1 P_2$ <≡> P_3 , где P_3 (-2:-2:1) и потому имеет место уравнение:

$$P_1 P_2 : \qquad -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 .$$

Отсюда заключаем, что $g_{13} = g_{23} = -2$, $g_{33} = 1$.

Аналогично рассуждая, находим и другие коэффициенты коники: $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = -2$.

Т. е. получаем такое уравнение нашей коники G:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3 = 0 .$$

Теперь определим образы точек конфигурации при проективном преобразовании g , заданном коэффициентами коники G.

$$g = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{Vmatrix} .$$

Найдём координыты точки $S^*\left(s_1^* : s_2^* : s_3^*\right)$ - образа точки S.

$$S \xrightarrow{g} S^*$$

Получаем такие уравнения, преобразований координат:

$$\begin{aligned} ax_1^* &= x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ ax_2^* &= -2x_1 + x_2 - 2x_3 , \\ ax_3^* &= -2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{aligned} \qquad (14)$$

где a - произвольный действительный множитель.

Т. к. точка S имеет координаты (1:1:1), то получаем:

$$\begin{aligned} as_1^* &= 1 - 2 - 2 = -3 \\ as_2^* &= -2 + 1 - 2 = -3 , \\ as_3^* &= -2 - 2 + 1 = -3 \end{aligned}$$

и помня, что речь идёт об однородных координатах, можем записать:

$$S^*(1:1:1) \equiv S$$

Т. е. точка S является инвариантом преобразования g.

Подставляя координаты точек A_i и P_i в уравнения (14), не трудно показать, что

$$A_i \xrightarrow{g} P_i \quad \text{и} \qquad P_i \xrightarrow{g} A_i .$$

Кроме этих точек данная конфигурация имеет ещё три точки, принадлежащие прямой ***l***, координаты которых, как было найдено ранее: (0:-1:1), (1:0:-1), (-1:1:0).

Не трудно убедиться, что эти точки также, как и точка ***S*** являются инвариантами (неподвижными точками) преобразования g.

Всё это говорит о том, что вся наша (КД) конфигурация Дезарга – инвариант преобразования ***g***.

Что и требовалось доказать.

Теперь в качестве ещё одного примера рассмотрим (КД) конфигурацию теоремы «о перспективных треугольниках» (см. работу автора «Теоремы проективной геометрии»).

Напомним формулировку этой теоремы:

Если два перспективных треугольника $A_1 A_2 A_3$ и $A_1^* A_2^* A_3^*$ соответственно, вписаны в произвольную конику *G*, то точки пересечения сторон $A_i A_j$ (или сторон $A_i^* A_j^*$) и поляр вершин A_k^* (или вершин A_k) лежат на одной прямой *l* (или прямой l^*). Причём ось перспективы данных треугольников и прямые *l* и l^* пересекаются в одной точке.

Для данной теоремы, в той же работе автора, был рассмотрен частный случай, когда прямые ***l***, l^* и ось перспективы треугольников $A_1 A_2 A_3$ и $A_1^* A_2^* A_3^*$ совпадали. В связи с этим справедлива следующая теорема.

Теорема 8 **Если конфигурация Дезарга перспективных треуглльников, вписанных в общую конику, является координатно-двойственной, то прямые *l*, l^* и ось перспективы данных треугольников совпадают.**

Доказательство:

Пусть два перспективных треугольника, вписанных в общую конику, образуют (КД) конфигурацию Дезарга.

В качестве проективного репера выберем четвёрку точек $\{A_1, A_2, A_3, S\}$, как это было сделано в работе «Теоремы проективной геометрии». Здесь точка S является центром перспективы данных треугольников. Тогда, в силу Теоремы 2, будем иметь такие координаты точек для второго треугольника:

$$A_1^*(1:-2:-2), \qquad A_2^*(-2:1:-2), \qquad A_3^*(-2:-2:1)$$

Как мы уже говорили, уравнение коники в общем случае имеет вид:

$$\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i x_j = 0, \text{ где } g_{ij} = g_{ji}. \qquad (15)$$

Подставляя координаты точек A_i и A_i^* в выражение (15), находим коэффициенты нашей g_{ij} коники:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 0,\ g_{13} = g_{12} = g_{23}. \qquad (16)$$

Т. е. наша коника будет иметь уравнение:

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 0$$

В той же работе «Теоремы проективной геометрии» были показаны уравнения прямых l и l^* и оси перспективы данных треунольников.

$$l: \qquad g_{23}x_1 + g_{13}x_2 + g_{12}x_3 = 0,$$

$$l^* \qquad (g_{12} + g_{13} - g_{23})x_1 + (g_{12} + g_{23} - g_{13})x_2 + (g_{13} + g_{23} - g_{12})x_3 = 0,$$

для оси перспективы: $$(g_{12} + g_{13})x_1 + (g_{12} + g_{23})x_2 + (g_{13} + g_{23})x_3 = 0.$$

Подставляя коэффициенты (16), в вышеприведённые уравнения, не трудно заметить, что все три уравнения тождественны и имеют уравнение:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Что и требовалось доказать.

Справедлива также и обратная теорема.

Теорема 9 Если прямые l, l^* и ось перспективы данных треугольников совпадают, то конфигурация Дезарга является (КД) конфигурацией.

Доказательство:

Выберем проективный репер $\{A_1, A_2, A_3, S\}$.

Уравнение коники в данном репере будет иметь вид:

$$g_{12}x_1 x_2 + g_{13}x_1 x_3 + g_{23}x_2 x_3 = 0.$$

Условия, при которых уравнения прямых l, l^* совпадают, можем записать в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} g_{12} + g_{13} - g_{23} = ag_{23} \\ g_{12} + g_{23} - g_{13} = ag_{13} \\ g_{13} + g_{23} - g_{12} = ag_{12} \end{cases}.$$

Сложим левые и правые части этих уравнений, получим:

$$g_{12} + g_{13} + g_{23} = a(g_{12} + g_{13} + g_{23}),$$

откуда $a = 1$. Т. е. получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} g_{12} + g_{13} = 2g_{23} \\ g_{12} + g_{23} = 2g_{13} \\ g_{13} + g_{23} = 2g_{12} \end{cases}.$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим:

$$g_{13} - g_{23} = 2(g_{23} - g_{13}).$$

Это выражение будет справедливо если $g_{13} = g_{23}$. И с учётом этого, из третьего уравнения находим, что $g_{13} = g_{23} = g_{12}$, т. е. уравнение коники будет иметь вид:

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 0.$$

Найдём уравнение прямой $A_1 S$.

$$A_1 S: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x_2 + x_3 = 0.$$

Теперь можем найти координаты точки A_1^*, как пересечение прямой $A_1 S$ и коники G.

$$\begin{cases} x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Нам достаточно найти частное решение данной системы, т. к. речь идёт об однородных координатах, поэтому, без ущерба для общности, положим $x_1 = 1$, получим:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_2 x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\text{или } 2x_2 + x_2^2 = x_2(2 + x_2) = 0.$$

Решение $x_2 = 0$ не подходит, т. к. в этом случае $A_1 \equiv A_1^*$. Следовательно, $x_2 = -2$, т. е. A_1^* (1:-2:-2).

Аналогично находим, что A_2^* (-2:1:-2), A_3^* (-2:-2:1).

Мы помним, что конфигурация Дезарга, перспективные вершины треугольников которой имеют такие координаты точек, будет координатно-двойственной.

Что и требовалось доказать.

И ещё одно замечание.

Рассмотрим проективное преобразование g, заданное нашей коникой G, т.е.:

$$g = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{Vmatrix}.$$

Для точки $\boldsymbol{S}$ и её поляры справедлив координатный принцип двойственности, следовательно, в силу обратной теоремы «о неподвижной точке», точка $\boldsymbol{S}$ будет инвариантом данного преобразования $\boldsymbol{g}$.

5. Теорема об автополярной конфигурации.

В заключение данной работы докажем теорему, обобщающую инвариантные (КД) конфигурации.

Дадим определение автополярной конфигурации.

Определение: **Автополярной будем называть конфигурацию, состоящую из *N* точек (полюсов) и *N* прямых (соответствующих данным полюсам поляр).**

Теорема 10: **Всякая (КД) конфигурация, автополярная относительно некоторой коники, является инвариантом проективного преобразования, заданного данной коникой.**

Доказательство:

Пусть дана некоторая (КД) конфигурация и коника $\boldsymbol{G}$, относительно которой данная конфигурация будет будет автополярной.

Рассмотрим одну из точек данной конфигурации и её поляру.

Пусть это будет точка $\boldsymbol{A}$ и поляра $\boldsymbol{a}$. Возможны два случая:

1). $\boldsymbol{A} <\equiv> \boldsymbol{a}$,

2). $\boldsymbol{A} <\neq> \boldsymbol{a}$, (значок $<\neq>$ противоположен по смыслу значку $<\equiv>$).

Рассмотрим первый случай.

Если $\boldsymbol{A} <\equiv> \boldsymbol{a}$, то по, теореме «о неподвижной точке», точка $\boldsymbol{A}$ будет инвариантом проективного преобразования, задаваемого коникой $\boldsymbol{G}$.

Рассмотрим второй случай, когда $\boldsymbol{A} <\neq> \boldsymbol{a}$.

Пусть точка A имеет координаты $(a_1 : a_2 : a_3)$. Найдём уравнение её поляры.

$$g_{11}x_1a_1 + g_{22}x_2a_2 + g_{33}x_3a_3 +$$

$$+ g_{12}(x_1a_2 + x_2a_1) + g_{13}(x_1a_3 + x_3a_1) + g_{23}(x_2a_3 + x_3a_2) =$$

$$= x_1(g_{11}a_1 + g_{12}a_2 + g_{13}a_3) + x_2(g_{12}a_1 + g_{22}a_2 + g_{23}a_3) + x_3(g_{13}a_1 + g_{23}a_2 + g_{33}a_3) = 0$$

Т. к. наша конфигурация является координатно-двойственной, то среди всех точек конфигурации обязательно найдётся точка $\boldsymbol{B}$ координатно-двойственная поляре $\boldsymbol{a}$, т. е. $\boldsymbol{a} <\equiv> \boldsymbol{B}(b_1 : b_2 : b_3)$. Или можем записать:

$$\begin{aligned} kb_1 &= g_{11}a_1 + g_{12}a_2 + g_{13}a_3 \\ kb_2 &= g_{21}a_1 + g_{22}a_2 + g_{23}a_3 \\ kb_3 &= g_{31}a_1 + g_{32}a_2 + g_{33}a_3 \end{aligned} \quad . \tag{17}$$

А это ни что иное, как выражение проективного преобразования точки $A\left(a_1 : a_2 : a_3\right)$, т. е. $A \xrightarrow{g} B$, где A и B обе принадлежат данной конфигурации.

Окончательно получаем:

Т. к. все точки конфигурации можно отнести либо к случаю 1), либо к случаю 2), то при преобразовании g точки конфигурации будут либо неподвижны, либо перейдут в точки этой же конфигурации. А, следовательно, вся конфигурация в целом будет инвариантом проективного преобразования g .

Что итребовалось доказать.

Рассмотрим несколько примеров автополярных (КД) конфигураций.

Пример 1.

Простейшей такой конфигурацией будет автополярный треугольник.

Найдём для данного треугольника инвариантное проективное преобразование (инвариантное – т. е. такое, при котором вся конфигурация остаётся неподвижной).

Уравнение коники в общем случае имеет вид:

$$\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}x_i x_j = 0, \text{ где } g_{ij} = g_{ji} .$$

Обозначим вершины нашего треугольника через 1, 2, 3, где 1(1:0:0), 2(0:1:0), 3(0:0:1).

Уравнение поляры точки 1 имеет вид:

$$g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + g_{13}x_3 = 0 .$$

Т. к. мы имеем автополярную (КД) конфигурацию, то данная поляра может быть координатно-двойственна только точке 1(1:0:0), в силу принципа неинцидентности координатно-двойственного отношения. Отсюда получаем:

$$g_{11} = 1, \qquad g_{12} = g_{13} = 0 .$$

Аналогично определяем, что $g_{23} = 0$, $\quad g_{22} = g_{33} = 1$.

Т. е. получаем такое уравнение коники:

$$G: \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

Матрица преобразования, задаваемая такой коникой имеет вид:

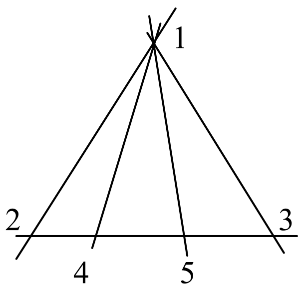
$$g = \begin{Vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{Vmatrix},$$

а это ни что иное, как тождественное преобразование, т. е. данный автополярный треугольник будет действительно инвариантом преобразования $\boldsymbol{g}$.

Пример 2.

Рассмотрим конфигурацию Рис. 4.

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3)
3 - (1, 2)
4 - (1, 5)
5 - (1, 4)



1(1:0:0), 2(0:1:0), 3(0:0:1), 4(0:1: a), 5(0:- a:1).

Пусть треугольник 1, 2, 3 является автополярным треугольником относительно некоторой коники $\boldsymbol{G}$, а вся конфигурация является – инвариант преобразования, задаваемого этой коникой. Покажем, что данная конфигурация будет автополярной.

Как было показано выше, уравнение такой коники имеет вид:

$$\boldsymbol{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0}.$$

Найдём поляру точки 4(0:1: a): $\boldsymbol{x_2 + ax_3 = 0}$. А это ни что иное, как уравнение прямой (1, 5), действительно:

$$(1, 5): \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{-a} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{x_2 + ax_3 = 0}$$

И, в силу принципа взаимности поляр и полюсов, полярой точки 5 будет прямая (1, 4).

Как видим, мы решили обратную задачу. У нас была инвариантная (КД) конфигурация, мы мы доказали, что она является автополярной. Поэтому справедлива также обратная теорема об автополярной конфигурации.

Теорема 11: **Всякая инвариантная (КД) конфигурация, относительно проективного преобразования, заданного некоторой коникой, является автополярной конфигурацией.**

Доказательство мы здесь не приводим. Оно пости очевидно вытекает из доказательства прямой тоеремы.

Пример 3:

(КД) конфигурация Дезарга для теоремы «о поляре треугольника», является автополярной, а, следовательно, она будет инвариантом преобразования, порождаемого коникой, относительно которой она автополярна.

Это было доказано в предыдущем разделе данной работы.

С другой стороны, т. к. (КД) конфигурация Дезарга есть инвариант проективного, задаваемого некотой коникой, то данная конфигурация будет автополярной, относительно этой коники.

6. Приложение. (КД) конфигурации 9-го порядка.

Мы покажем здесь только собственные конфигурации, которые удалось нам построить, т. к. несобственные конфигурации представляются очевидными объединениями трёхточечных и шеститочечных конфигураций.

1 - (2, 3)
2 - (1, 4)
3 - (1, 5)
4 - (2, 6)
5 - (3, 7)
6 - (4, 8)
7 - (5, 9)
8 - (6, 9)
9 - (7, 8)

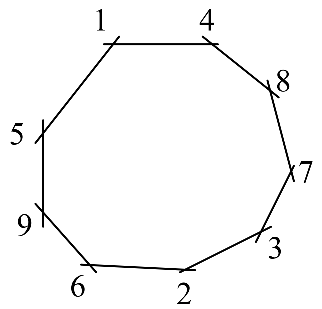


Рис. 30

1 - (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
2 - (1, 3)
3 - (1, 2)
4 - (1, 5)
5 - (1, 4)
6 - (1, 7)
7 - (1, 6)
8 - (1, 9)
9 - (1, 8)

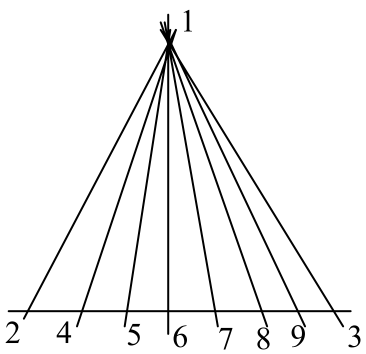


Рис. 31

1 - (2, 3, 4, 5, 6, 7)
2 - (1, 3, 8, 9)
3 - (1, 2)
4 - (1, 5)
5 - (1, 4)
6 - (1, 7)
7 - (1, 6)
8 - (2, 9)
9 - (2, 8)

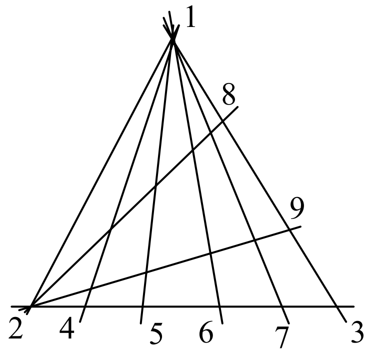


Рис. 32

1 - (2, 3, 4, 5, 6, 7)
2 - (1, 3, 8)
3 - (1, 2)
4 - (1, 5, 9)
5 - (1, 4)
6 - (1, 7)
7 - (1, 6)
8 - (2, 9)
9 - (4, 8)

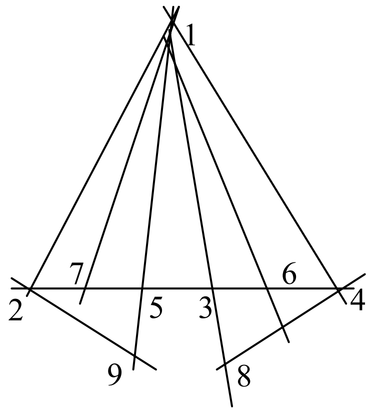


Рис. 33

1 - (2, 3, 4, 5, 6)
2 - (1, 3, 7, 8)
3 - (1, 2)
4 - (1, 5)
5 - (1, 4)
6 - (1, 9)
7 - (2, 8, 9)
8 - (2, 7)
9 - (6, 7)

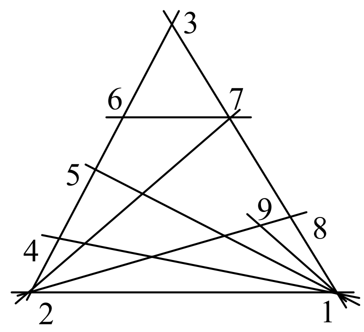


Рис. 34

1 - (2, 3, 4, 5, 6)
2 - (1, 3)
3 - (1, 2, 8)
4 - (1, 5, 9)
5 - (1, 4)
6 - (1, 7)
7 - (6, 8, 9)
8 - (3, 7)
9 - (4, 7)

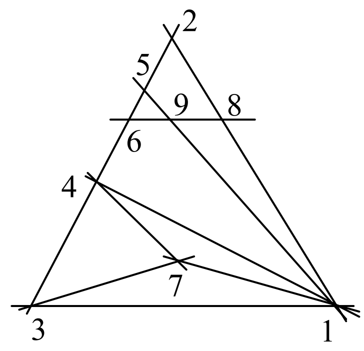


Рис. 35

1 - (2, 3, 4, 5, 6)
2 - (1, 3)
3 - (1, 2, 8)
4 - (1, 5, 9)
5 - (1, 4)
6 - (1, 7)
7 - (6, 8, 9)
8 - (3, 7, 9)
9 - (4, 7, 8)

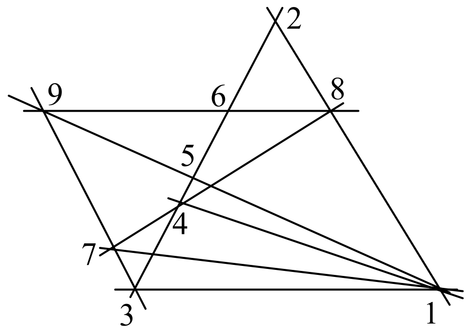


Рис. 36

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3, 6, 7)
3 - (1, 2, 8, 9)
4 - (1, 5)
5 - (1, 4)
6 - (2, 7)
7 - (2, 6)
8 - (3, 9)
9 - (3, 8)

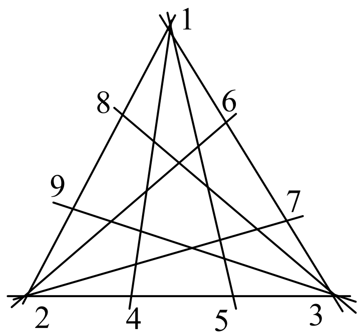


Рис. 37

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3, 6, 7)
3 - (1, 2, 8)
4 - (1, 5, 9)
5 - (1, 4)
6 - (2, 7, 9)
7 - (2, 6)
8 - (3, 9)
9 - (4, 6, 8)

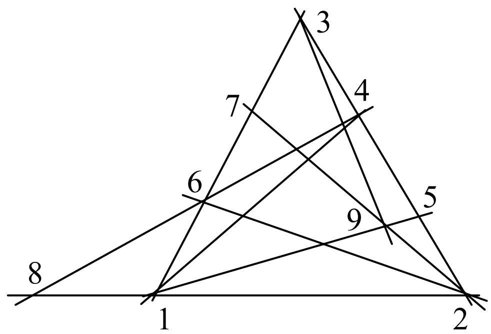


Рис. 38

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3, 6, 7)
3 - (1, 2)
4 - (1, 5, 9)
5 - (1, 4, 8)
6 - (2, 7, 8, 9)
7 - (2, 6)
8 - (5, 6)
9 - (4, 6)

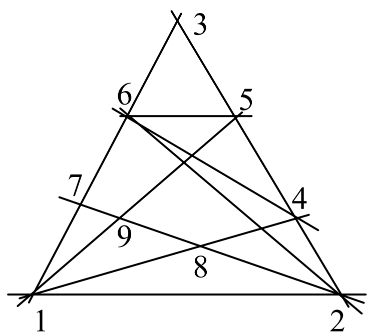


Рис. 39

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3, 6)
3 - (1, 2, 7)
4 - (1, 5, 8)
5 - (1, 4, 9)
6 - (2, 8, 9)
7 - (3, 8)
8 - (4, 6, 7)
9 - (5, 6)

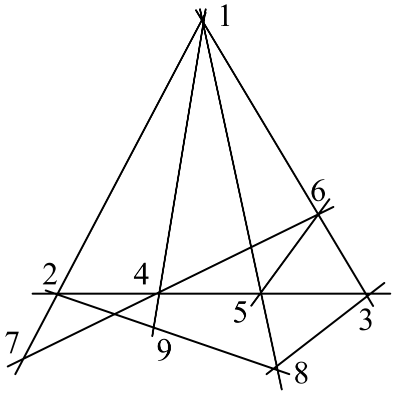


Рис. 40

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3)
3 - (1, 2)
4 - (1, 6)
5 - (1, 7)
6 - (4, 8)
7 - (5, 9)
8 - (6, 9)
9 - (7, 8)

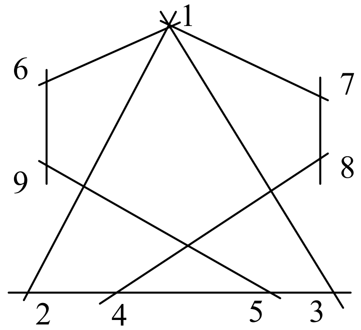


Рис. 41

1 - (2, 3, 4)
2 - (1, 3, 5)
3 - (1, 2, 6)
4 - (1, 7, 8)
5 - (2, 7, 9)
6 - (3, 7)
7 - (4, 5, 6)
8 - (4, 9)
9 - (5, 8)

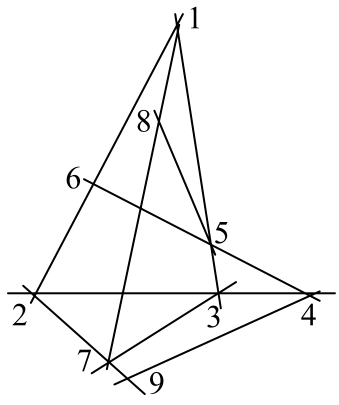


Рис. 42

1 - (2, 3, 4, 5)
2 - (1, 3)
3 - (1, 2)
4 - (1, 9)
5 - (1, 6, 7, 8)
6 - (5, 7)
7 - (5, 6)
8 - (5, 9)
9 - (4, 8)

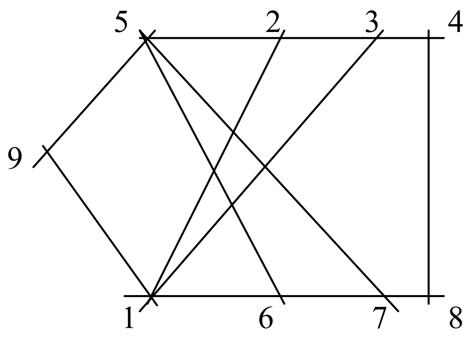


Рис. 43

1 - (2, 3, 4)
2 - (1, 3, 6)
3 - (1, 2, 9)
4 - (1, 5, 8)
5 - (4, 6)
6 - (2, 5, 7)
7 - (6, 8, 9)
8 - (4, 7, 9)
9 - (3, 7, 8)

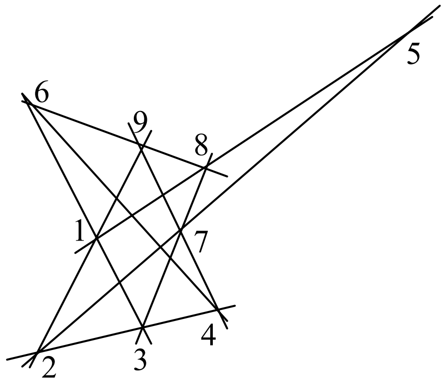


Рис. 44