Франц Герман

Задача о жуках

(www.franz-hermann.com)

"Сколь ни скупыми могут показаться сообщённые сведения, тем не менее они позволяют однозначно решить задачу."

Мартин Гарднер

Представим себе, что у нас есть несколько механических жуков, которые обладают следующими свойствами:

1). Жук умеет ползать и оставлять за собой след, т.е. пройденный путь жука всегда будет виден. Кстати, муравьи тоже помечают свой путь и, хотя он не виден для человека, другие муравьи этот путь находят и пользуются им.

2). Ползать наш жук умеет только по гладкой кривой (или прямой) линии. В математике есть строгое определение гладкой кривой, но мы не будем здесь заострять на этом наше внимание, поэтому мы поясним, что такое гладкая кривая на рисунках.

Во-первых наша кривая не должна содержать углов излома (точек излома).

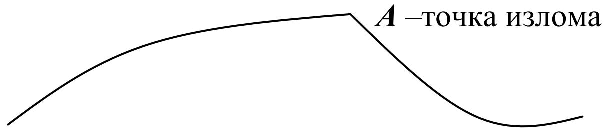

Рис.1

Во-вторых наша кривая не должна иметь точек возврата.

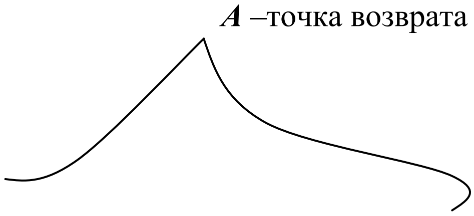

Рис. 2

На Рис. 3 показан пример гладкой кривой.

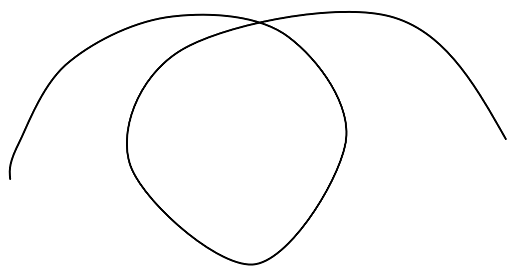

Рис. 3

3. Жук снабжён рацией и умеет передавать своему хозяину (т.е. нам) следующую информацию:

а)."Пересёк кривую".

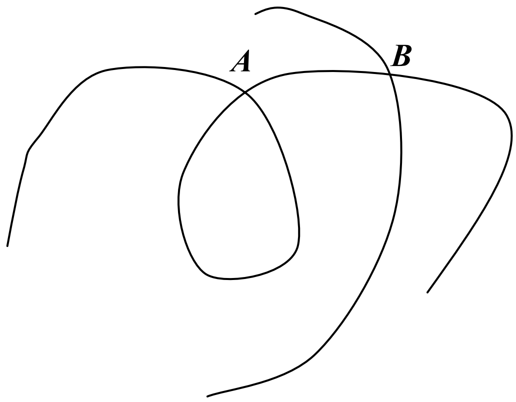

Рис. 4

Такую информацию жук передаёт в том случае если он натыкается на уже существующую кривую (пусть даже свою).

В этом случае мы должны для себя отметить, что появилась точка 4-го порядка. На Рис.4 такими точками являются точки ***A*** и ***B***. Порядок точки определяется числом линий из неё исходящих (в неё входящих). На Рис.5 показана точка 6-го порядка.

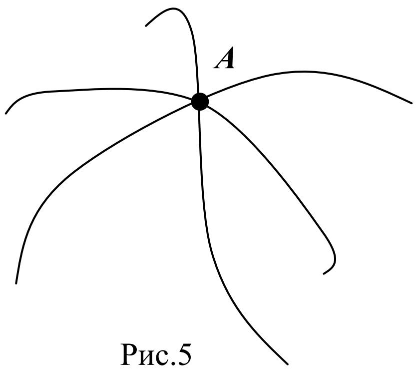

Рис.5

б). "Пересёк точку 4-го (2***n***-го) порядка.

В этом случае мы должны для себя отметить, что какая-то точка 4-го порядка перестала существовать (или точка 2***n*** -го порядка), но появилась точка 6-го порядка (или точка 2(***n*** **+1**)-го порядка).

Кроме этого в нашем распоряжении есть область поверхности, гомеоморфная кругу.

Предположим, что у пас есть кусок поверхности в виде круга, сделанного из очень прочного, но растяжимого материала. Если этот "круг" произвольно растянуть в разные стороны, но так, чтобы на нём нз образовалось складок, порезов, разрывов и дыр, то мы получим новый кусок поверхности, который и называется "гомеоморфный кругу". Пример такой поверхности показан на Рис. 6.

4. Наш жук начинает свой путь на границе такой области и ползает внутри этой области произвольно по гладким кривым сообщая при этом информацию а) или б) до тех пор пока снова не вернётся на границу области.

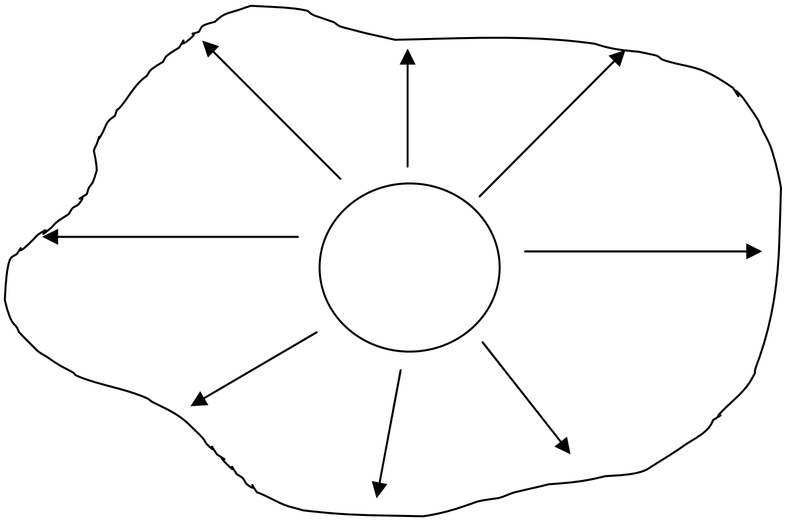

Рис. 6

Пусть мы жеем P таких жуков. После того, как все жуки снова вернутся на границу нашей области, мы будем иметь информацию о том сколько и какого порядка точки образовались внутри нашей области во время пересечений и самопересечений путей жуков.

Оказывается, что этой информации достаточно, чтобы вычислить на сколько частей Q жуки поделили нашу область. Т.е. справедлива такая формула:

$$Q = P + \sum_{n=2}^{k} T_{2n}(n-1) + 1 . \qquad (1)$$

T_{2n} - сумма точек порядка $2n$.

Рассмотрим пример.

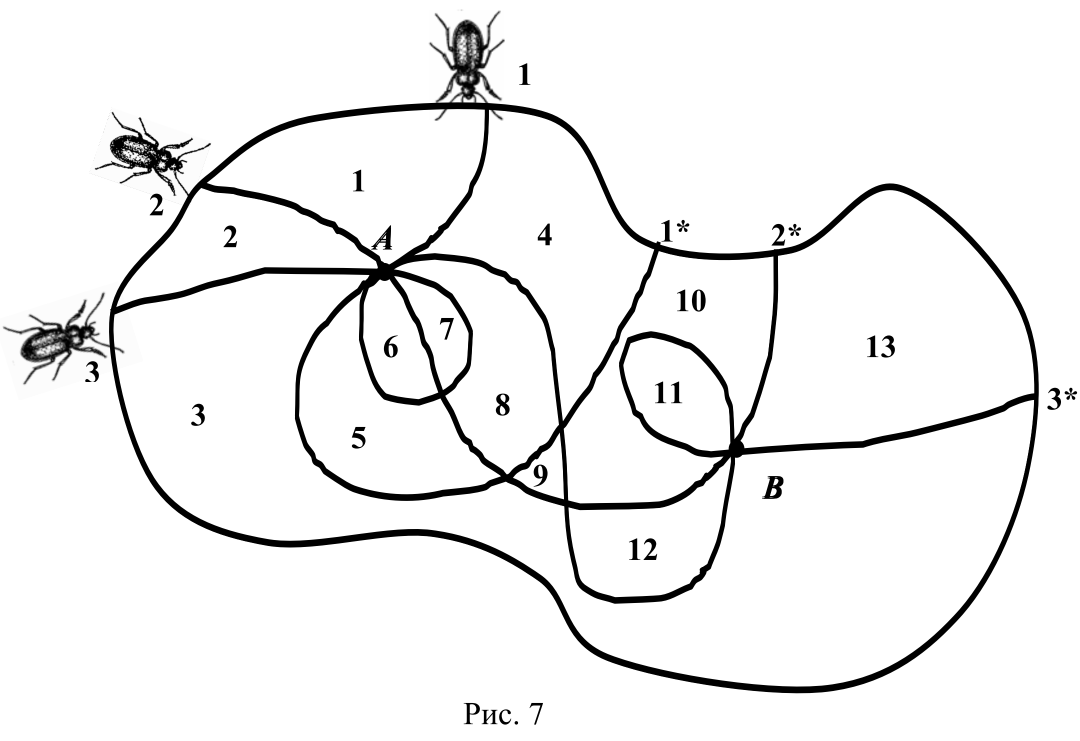

Рис. 7

Пусть мы имеем трёх жуков, т. е. ***P* = 3**. Жук **1** начинает свой путь из точки **1**. и возвращается в точку **1*** (этоуже другая точка). **2 – 2*** - это путь второго жука, **3-3*** - путь третьего жука (Рис.7).

Получив информацию от жуков, мы знаем, что у нас есть одна точка 8-го порядка. Это точка ***A***. Одна точка 6-го порядка. Это точка ***B*** . И четыре точки 4-го порядка.

Подставим всё это в формулу (1).

$$\boldsymbol{Q = 3 + 1(4-1) + 1(3-1) + 4(2-1) + 1 = 13}.$$

Как видим из Рис.3, наша область оказалась разделённой на 13 частей.
Теперь приступим к выводу формулы (1).

Красивое доказательство формулы (1) прислал мне известный популяризатор науки, канадский математик Росс Хонсбергер из университета «Ватерлоо».

Для определённости будем считать, или скажем, что это 5-е свойство наших жуков, что все жуки не имеют общих точек исхода и возврата. По сути, этого всегда можно избежать, чуть - чуть сжав (пунктирная линия) нашу область (Рис.8).

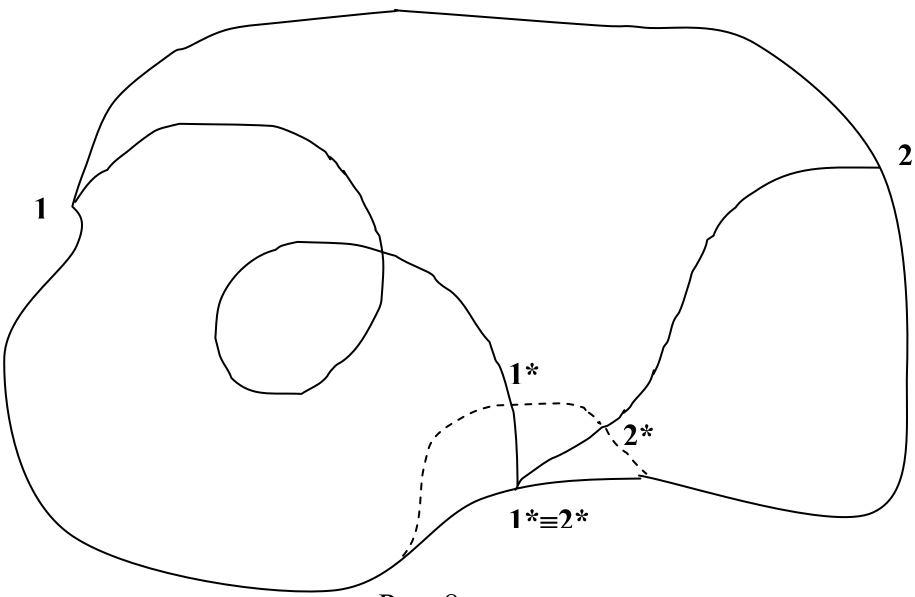

Рис. 8

В топологии известна формула Эйлера для плоской сети:

$$\boldsymbol{Q = C - B + 1}. \qquad (2)$$

Q - число граней, ***C*** - число связей (рёбер), ***B*** - число вершин.

Пример:

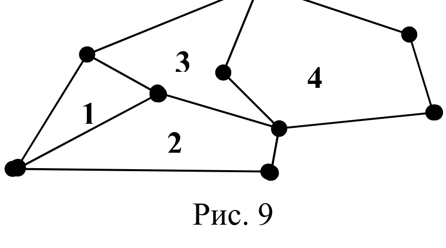

Рис. 9

Здесь ***Q* = 4, *C* = 12, *B* = 9**.

Наша область, с нанесёнными на неё путями жуков, не что иное, как плоская сеть (Рис.7). Мы имеем $\boldsymbol{P}$ жуков, которые, ползая, образовали $\sum_{n=2}^{k} \boldsymbol{T}_{2n}$ точек. Т.к. точки исхода и возврата различные, то на границе области мы имеем $\mathbf{2}\boldsymbol{P}$ точек. Т.е.

$$\boldsymbol{B} = \mathbf{2}\boldsymbol{P} + \sum_{n=2}^{k} \boldsymbol{T}_{2n} \,.$$

Каждая точка даёт вклад в число $\boldsymbol{T}_{2n}$ такой какой имеет порядок. Например точка 4-го порядка имеет 4 связи (Рис.10).

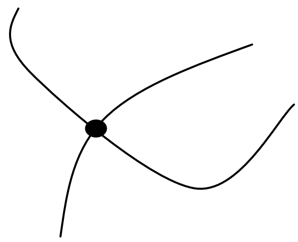

Рис. 10

Мы имеем:

$$\sum_{n=2}^{k} \boldsymbol{T}_{2n} = \boldsymbol{T}_4 + \boldsymbol{T}_6 + \boldsymbol{T}_8 + \ldots + \boldsymbol{T}_{2k} \,.$$

где $\boldsymbol{T}_{2n}$ - сумма точек порядка 2$\boldsymbol{n}$. И кроме того имеем" $\mathbf{2}\boldsymbol{P}$ точек третьего порядка на границе области.

Т.о. наши точки порождают такое количество связей (рёбер):

$$\mathbf{3} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{P} + \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{T}_4 + \mathbf{6} \cdot \boldsymbol{T}_6 + \ldots + \mathbf{2}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{T}_{2k} =$$

$$= \mathbf{3} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{P} + \sum_{n=2}^{k} \left(\mathbf{2}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}_{2n} \right).$$

Но каждая связь в сети соединяет обязательно две точки, поэтому получаем:

$$\boldsymbol{C} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \left(\mathbf{3} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{P} + \sum_{n=2}^{k} \left(\mathbf{2}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}_{2n} \right) \right).$$

Подставим полученные $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ в формулу Эйлера, получим:

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \left(\mathbf{3} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{P} + \sum_{n=2}^{k} \left(\mathbf{2}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}_{2n} \right) \right) - \mathbf{2}\boldsymbol{P} - \sum_{n=2}^{k} \boldsymbol{T}_{2n} + \mathbf{1} = \boldsymbol{P} + \sum_{n=2}^{k} \boldsymbol{T}_{2n} (\boldsymbol{n} - \mathbf{1}) + \mathbf{1} \,.$$

т.е. получили формулу (1).

Изменим теперь программу движения нашим жукам. Пусть жук (каким-то образом перелетевший в нашу область) ходит внутри этой области по замкнутой гладкой кривой (Рис.11).

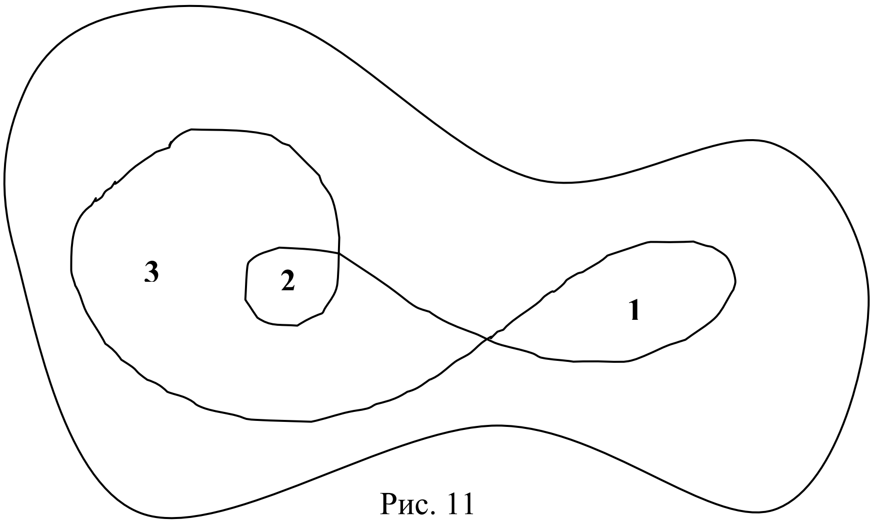

Рис. 11

Наша задача: определить на сколько частей данная кривая (путь жука) разделила нашу область, заключённую внутри кривой. На Рис.11 мы видим, что таких областей получилось три.

Т.к. мы умеем деформировать, т.е. сжимать и растягивать нашу область, то всегда можем добиться такого положения, что граница области будет пересекать данную кривую в двух различных, но близко лежащих, точках (Рис.12).

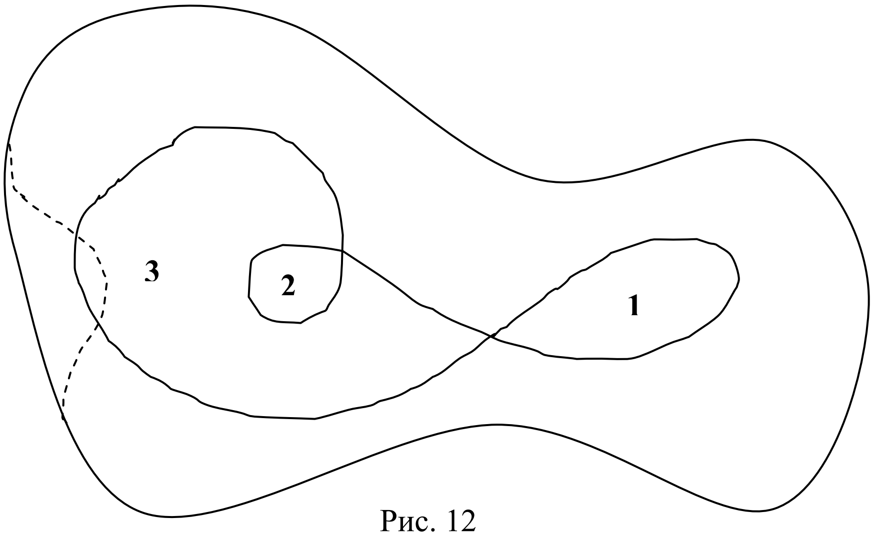

Рис. 12

Т.о. задала свеласъ к предыдущему случаю. Мы помним, что область в этом случае делится на части:

$$Q = P + \sum_{n=2}^{k} T_{2n}(n-1) + 1$$

Отсюда заключаем, что внутри нашей кривой имеется

$$Q_B = \sum_{n=2}^{k} T_{2n}(n-1) + 1 \qquad (3)$$

частей.

Действительно (Рис.11), наша кривая имеет две точки 4-го порядка, т.е. имеем:

$$Q_B = 2(2-1) + 1 = 3.$$

Наша область может содержать несколько замкнутых кривых. Поэтому необходимо дать следующее определение:

Определение:

Две замкнутые кривые, расположенные на поверхности, гомеоморфной поверхности круга, называются независимыми, если они не имеют общих точек. Пример:

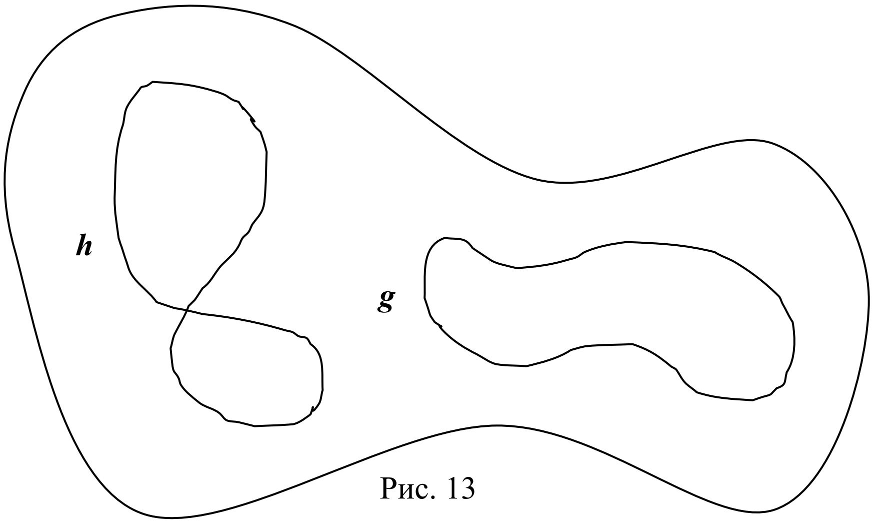

Рис. 13

Кривые ***h*** и ***g*** независимы.

И наоборот: если две кривые имеют хотя бы одну общую точку (это случай касания двух кривых), то они называются зависимыми. Можно доказать теорему, что две зависимые замкнутые кривые эквивалентны одной замкнутой кривой.

Теперь представим, что наши жуки, заброшенные ветром в некоторую область, гомеоморфную кругу, умеют ползать только по независимым замкнутым кривым, т.е. начав движение всегда возвращаются в исходную точку и здесь останавливаются, причём пути различных жуков не пересекаются (кривые независимы). Во время же движения, как и прежде, жуки сообщают нам информацию типа а) и б).

Выясним на сколько частей ***P*** таких жуков разделят нашу поверхность.

Обозначим сумму точек самопересечений ***i***-ой кривой через $\sum\limits_{n=2}^{k} T_{2n}^{i}$.

Мы можем вычислить сколько частей данной поверхности содержится внутри наших кривых используя формулу (3). Т.е. имеем:

$$\left(\sum_{n=2}^{k} T_{2n}^{1}(n-1)+1\right)+\left(\sum_{n=2}^{k} T_{2n}^{2}(n-1)+1\right)+\ldots+\left(\sum_{n=2}^{k} T_{2n}^{P}(n-1)+1\right)=\sum_{n=2}^{k} T_{2n}(n-1)+P,$$

где $\sum\limits_{n=2}^{k} T_{2n}^{1}+\sum\limits_{n=2}^{k} T_{2n}^{2}+\ldots+\sum\limits_{n=2}^{k} T_{2n}^{P}=\sum\limits_{n=2}^{k} T_{2n}$.

Кроме этого, очевидно, имеем ещё один кусок области, охватывающий все наши кривые. Отсюда получаем такую формулу:

$$Q=P+\sum_{n=2}^{k} T_{2n}(n-1)+1 .$$

Мы видим, что и в этом случае формула (1) пригодна для вычисления.
Пример:

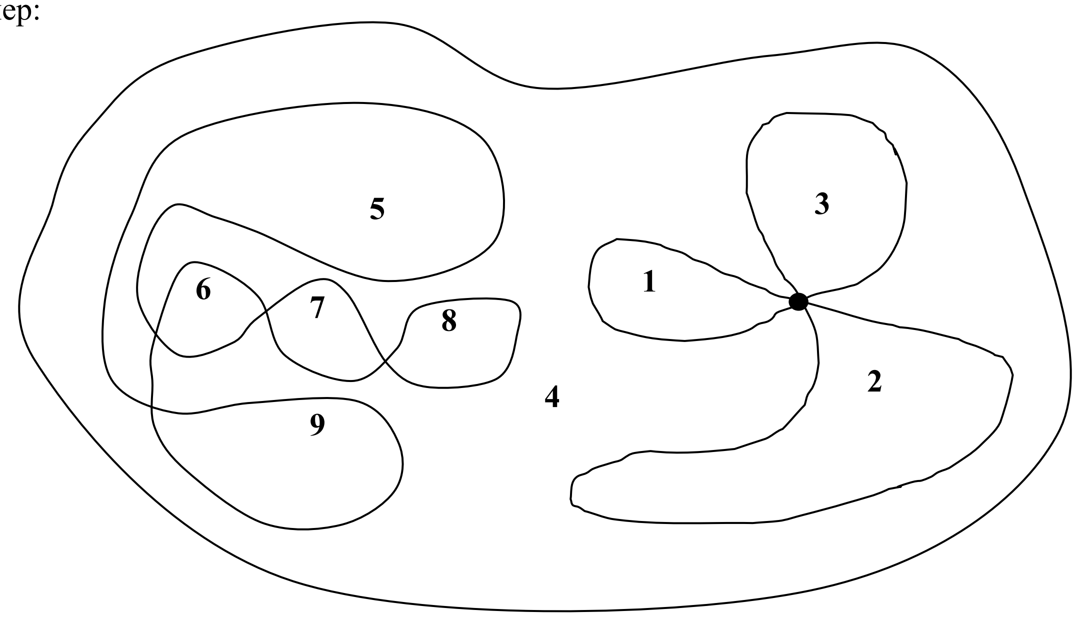

Рис. 14

Независимых кривых $\boldsymbol{P} = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{T}_4 = \mathbf{4}$, $\boldsymbol{T}_6 = \mathbf{1}$

$$\boldsymbol{Q} = \mathbf{2} + \mathbf{4}(\mathbf{2} - \mathbf{1}) + \mathbf{1}(\mathbf{3} - \mathbf{1}) + \mathbf{1} = \mathbf{9}\,.$$

Нашу область мы можем "натянуть" на сферу, отождествив её границу с одной точкой (стянув границу в точку). Т.к. такая точка не принадлежит ни одной из наших кривых, то формула (1) будет справедлива и для поверхности сферы, с расположенными на ней ***P*** замкнутыми независимыми кривыми.

Задачи для дальнейшего исследования:

1). Ввести понятия зависимости замкнутой и незамкнутой кривой и рассмотреть эти кривые на области, гомеоморфной кругу.

2). Исследовать область, гомеоморфную области круга с дыркой.

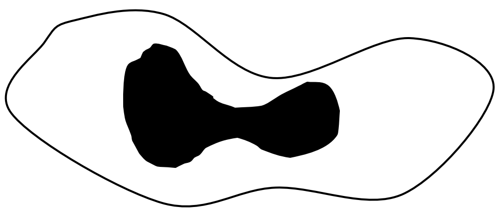

Рис. 15

Здесь исследуемая область имеет уже две границы. Следовательно, появятся новые типы кривых, концы которых принадлежат разным границам.

3). Попытаться исследовать эту же задачу на повехности тора (бублика) с независимыми замкнутыми кривыми.

4). Попытаться обобщить исследование 2. на случай поверхности с ***К*** дырками.