

Франц Герман

Магические колёса или упаковки клеточных полей (www.franz-hermann.com)

В математике задачей на упаковку принято называть задачу, в которой заданное множество математических объектов требуется как можно более экономно упаковать в заданном пространстве по заданным правилам.

Мартин Гарднер

На самом деле за любой системой счисления стоит, конечно, одна и та же старушка арифметика.

Мартин Гарднер

В этой работе мы познакомимся с некоторыми упаковками (алгоритмами упаковок) замкнутых клеточных полей.

Что такое клеточное поле.

Совокупность из n клеток будем называть клеточным полем (или решеткой).

Пример:

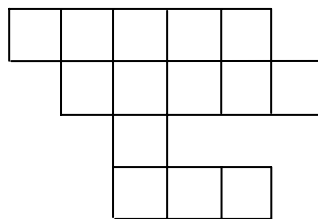


Рис. 1

Если поле содержит n клеток, то будем говорить, что порядок этого поля равен n . Поле, изображённое на Рис. 1 имеет порядок $n = 14$.

Мы будем рассматривать поля, на которых задан порядок следования клеток друг за другом (очередность).

Пример:

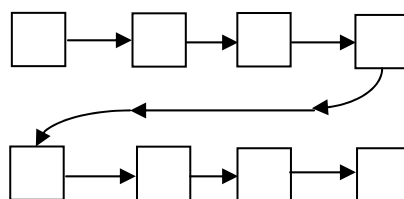


Рис.2

Порядок следования может быть задан словесно, а не обязательно в виде стрелок, как на Рис.2.

Например, клетки поля (Рис.2) заполняются построчно слева-направо и строки чередуются сверху-вниз.

Если поле имеет замкнутый порядок следования клеток, то такое поле будем называть замкнутым клеточным полем.

Пример:

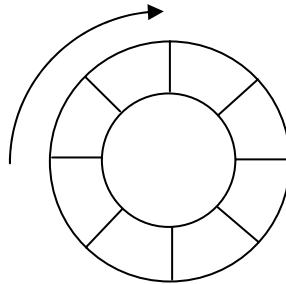


Рис.3

Здесь порядок следования задаётся движением по часовой стрелке. Если поле замкнуто, то его порядок будем называть периодом и обозначать буквой P . На Рис.3 изображено поле с периодом $P = 8$.

Скажем ещё два слова о том, что такое упаковка чисел.

Упаковка чисел это определённый алгоритм (правило), по которому числа ставятся в клетки нашего поля. Мы рассмотрим упаковки, которые позволяют заполнять некоторые замкнутые клеточные поля без пробелов, т.е. такие, чтобы ни одна клетка поля не оставалась пустой.

Рассмотрим один из таких алгоритмов упаковки.

- 1). Число **1** помещается в произвольную клетку замкнутого поля.
- 2). Число **2** помещается в следующую клетку поля, следуя направлению обхода.
- 3). Число **3** помещается в клетку, через одну клетку после числа **2**.
- 4). Число **4** помещается в клетку, через две клетки после числа **3**.
- и т.д.
- 5). Число $m+1$ помещается в клетку, через $m-1$ клетку после числа m .
- и т.д..
- 6). Число n помещается в клетку, через $n-2$ клетки после числа $n-1$.

Пример: пусть имеем замкнутое клеточное поле с периодом $P = 8$. Заполним его, следуя нашему алгоритму.

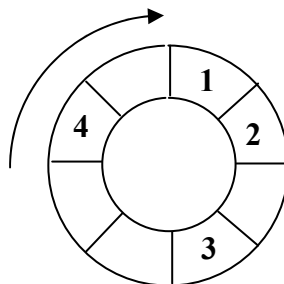


Рис. 4

И т. д.

Получаем такую картину:

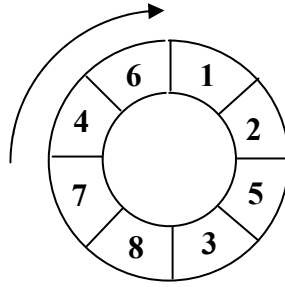


Рис.5

Сразу скажем, что пользуясь таким алгоритмом можно заполнить (упаковать) поля только определённого периода P . Чему же равен период таких полей нам и предстоит выяснить.

Предположим, что в нашем распоряжении есть бесконечное клеточное поле в виде строки.

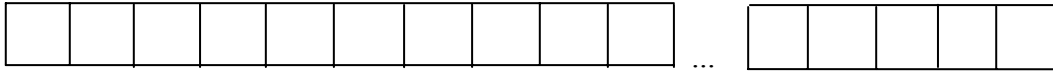


Рис. 6

Используя наш алгоритм, поместим в это поле числа от 1 до n .

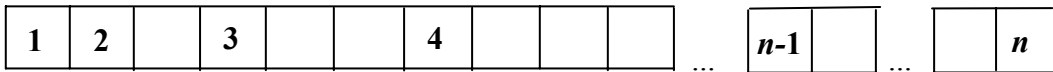


Рис. 7

Не трудно заметить, что число клеток нашего поля, не включая последнюю клетку (Рис.7), составляет сумму чисел натурального ряда от 1 до $n-1$, т.е.

$$\frac{1+(n-1)(n-1)}{2}.$$

Тогда период поля, в последней клетке которого стоит число n , равен:

$$P = \frac{n(n-1)}{2} + 1. \quad (1)$$

Пусть имеем поле периода P . Рассмотрим случай, когда два числа данного поля n_1 и n_2 попадают в одну клетку при заполнении поля по нашему алгоритму (имеется в виду конечно же замкнутое поле). Т.е. - это задача обратная задаче поставленной ранее, т.к. мы ищем поля с периодом P , которые не заполняются по описанному алгоритму.

Подставим в формулу (1) числа n_1 и n_2 , получим:

$$P_1 = \frac{n_1(n_1-1)}{2} + 1, \quad P_2 = \frac{n_2(n_2-1)}{2} + 1.$$

Пусть для определённости $n_1 < n_2$, тогда $n_1 < n_2 \leq P$. Если n_1 и n_2 попадают в одну клетку при заполнении нашего поля, то

$$P_2 - P_1 = q \cdot P,$$

где q , - целое число. Т.е. разность $P_2 - P_1$ должна быть кратна периоду нашего исходного поля.

$$\frac{(n_2 - n_1)(n_2 + n_1 - 1)}{2P} = q. \quad (2)$$

Формула (2) - это и есть условие, при котором замкнутое поле невозможно заполнить по нашему алгоритму.

Рассмотрим все возможные случаи для P .

1). Пусть P - нечётное число. Заметим, что среди чисел $1, 2, \dots, P$ всегда можно подобрать два числа n_1 и n_2 такие, что $n_2 + n_1 - 1 = P$, где n_1 и n_2 оба чётные. Это очевидно. Т.е. формула (2) имеет смысл при P - нечётном. Т.е. всегда существуют такие n_1 и n_2 , что подставляя их в формулу (2) получаем целое значение q .

Т.о., поля, период которых P равен нечётному числу, не заполняются по такому алгоритму.

2). Пусть $P = 2^k m$, где m - нечётное.

Для доказательства незаполняемости таких полей достаточно доказать хотя бы один частный случай.

Пусть $q = 1$, тогда:

$$\frac{(n_2 - n_1)(n_2 + n_1 - 1)}{2^{k+1} m} = 1. \quad (3)$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} n_2 - n_1 = 2^{k+1} \\ n_2 + n_1 - 1 = m \end{cases}$$

$$n_1 = \frac{m + 1 - 2^{k+1}}{2}; \quad n_2 = \frac{m + 1 + 2^{k+1}}{2};$$

n_1 и n_2 будут целыми числами при $m > 2^{k+1} - 1$. Тогда возникает вопрос, существуют ли такие целые n_1 и n_2 при $m \leq 2^{k+1} - 1$, для которых формула (3) была бы справедлива.

Рассмотрим такую систему уравнений:

$$\begin{cases} n_2 - n_1 = m \\ n_2 + n_1 - 1 = 2^{k+1} \end{cases}$$

$$n_1 = \frac{2^{k+1} + 1 - m}{2}; \quad n_2 = \frac{2^{k+1} + m + 1}{2}.$$

Получаем целые n_1 и n_2 при $m < 2^{k+1} + 1$. Т.к. m - нечётное, то из полученного неравенства справедливо следует неравенство:

$$m \leq 2^{k+1} - 1.$$

Остаётся рассмотреть третий случай.

3) $P = 2^k$, т. е. формула (3) будет иметь вид:

$$\frac{(n_2 - n_1)(n_2 + n_1 - 1)}{2^{k+1}} = q.$$

Один из сомножителей числителя всегда нечётный. Тогда для того, чтобы q было целым числом необходимо, чтобы другой сомножитель был бы по крайней мере равен 2^{k+1} . Число 2^{k+1} в два раза превышает период P , поэтому имеем:

при $n_1 < n_2 \leq P$, $n_2 + n_1 - 1 < 2^{k+1}$ и, тем более, $n_2 - n_1 - 1 < 2^{k+1}$. Таким образом, ни при каких n_1 и n_2 , где $n_1 < n_2 \leq P$, $P = 2^k$ выражение

$$\frac{(n_2 - n_1)(n_2 + n_1 - 1)}{2P}$$

не может быть целым числом.

Т.о. выяснилось, что только поля, период которых $P = 2^k$, могут заполняться без пробелов по нашему алгоритму.

Рассмотрим несколько следствий, вытекающих из такой упаковки клеточных полей.

Следствие 1.

При любом произволе начальной клетки, одна клетка поля будет содержать свой собственный номер.

Поясним это на примере. Пример: $P = 8$.

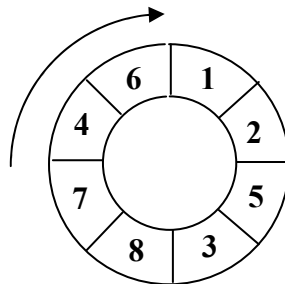


Рис. 8

Теперь пронумеруем последовательно в том же направлении клетки нашего поля. Начиная с любой произвольной клетки.

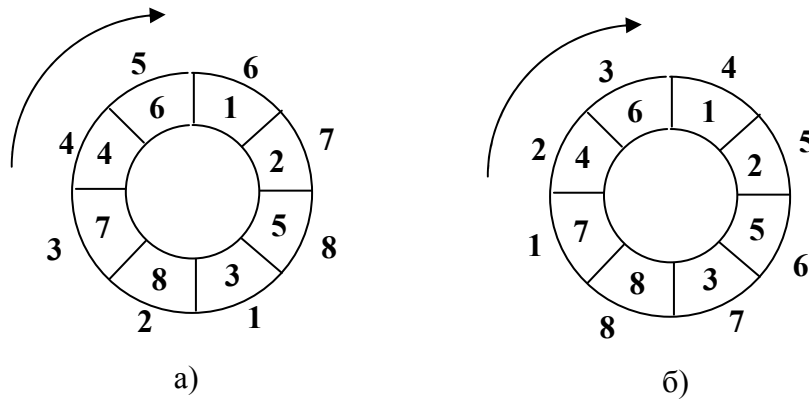


Рис. 9

Начальной клеткой в случае Рис.9 а) мы выбрали клетку, в которой стоит число **3**. Пронумеровав клетки замечаем, что число **4** стоит в клетке, порядковый номер которой равен четырём.

Во втором случае Рис. 9 б) начальной клеткой была клетка с числом **7**. В этом случае клетка с числом **8** получила порядковый номер равный **8**.

Докажем следствие 1.

Пусть клетка, где стоит число **1**, имеет порядковый номер X . Клетка с числом **2** будет иметь порядковый номер $X+1$. Клетка с числом **3** - $(X+3)$. Клетка с числом **4** - $(X+6)$ и т.д. Клетка с числом n будет иметь какой-то порядковый номер t . Порядковый номер клетки всегда $\leq P$, т.е. $t \leq P$. Если число $t > P$, то мы должны записать порядковый номер равный остатку от деления числа t на P , Какова общая формула для вычисления t ?

Посмотрев снова на Рис.49, мы замечаем, что между числом **1** и числом n находится $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ клетка. Тогда, если начальная клетка имеет порядковый номер

X , то клетка, где стоит число n , будет иметь порядковый номер $t = X + \frac{n(n-1)}{2}$.

Можем записать такое уравнение:

$$X + \frac{n(n-1)}{2} = q \cdot P + t,$$

здесь q - какое-то целое число.

Определим предельные границы числа q . Очевидно, что минимальное значение $q = 0$. Максимальную границу для q получаем при максимальных X и n , т.е. когда $X = n = P$. Получаем:

$$P + \frac{P(P-1)}{2} = \frac{P(P+1)}{2}.$$

Разделив это выражение на P получаем $\frac{P}{2} + \frac{1}{2}$. Целая часть этого выражения и есть максимальная граница для q , т.е.

$$0 \leq q \leq \frac{P}{2}.$$

Рассмотрим случай, когда порядковый номер клетки с числом n равен n , т.е. имеем такое уравнение:

$$X + \frac{n(n-1)}{2} = q \cdot P + n,$$

или преобразовав его, получаем уравнение:

$$n^2 - 3n + 2X - 2Pq = 0. \quad (4)$$

Это квадратное уравнение, да ещё с тремя неизвестными n , X и q . Причём все они должны быть целыми числами. Такие уравнения называются диофантовыми. По имени античного математика Диофанта. Существуют методы исследования таких уравнений, но это выходит за рамки нашей книги, поэтому мы выберём другой путь для доказательства следствия 1.

Сначала решим такую задачу.

Предположим, что у нас есть замкнутое клеточное поле, заполненное по правилам нашего алгоритма. Например поле, как на Рис.50. Выясним, существуют ли в этой расстановке чисел два числа n и $(n+k)$, удалённые друг от друга на $(k-1)$ клетку. Т.е. если двигаться по часовой стрелке (для заполнения замкнутого поля договоримся всегда выбирать это направление) от числа n к числу $(n+k)$, то мы насчитаем между ними $(k-1)$ клетку. Точно такое же расстояние (количество чисел) числа n и $(n+k)$ имеют в натуральном ряде чисел.

Предположим, что у нас есть достаточно длинное клеточное поле. Поставим в первую его клетку число n и, используя алгоритм упаковки (АУ), впишем в это поле числа $(n+1)$, $(n+2)$, ..., $(n+k)$.

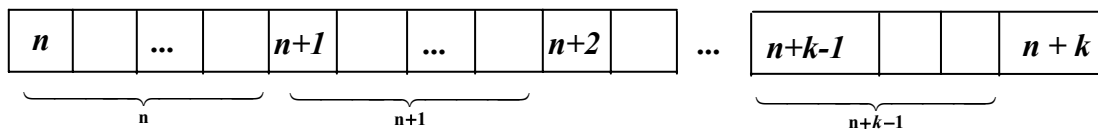


Рис. 10

Вычислим, используя формулу для суммы арифметической прогрессии, сколько клеток имеется в этом поле до клетки с числом $(n+k)$.

$$\frac{n + (n+k-1)}{2} \cdot k = \frac{(2n+k-1)k}{2}.$$

Тогда очевидно, что между клеткой с числом n и клеткой с числом $(n+k)$ имеется $\frac{(2n+k-1)k}{2} - 1$ клетка. Вычтем из этого выражения число $(k-1)$, получим:

$$\frac{k(2n+k-3)}{2}. \quad (5)$$

При каких k и n выражение (5) будет кратно периоду P нашего замкнутого поля? Сразу заметим, что при $n = k = 1$ выражение (5) равно нулю, т.е. является кратным для любого периода P . Т.е. числа $n = 1$ и $n + k = 2$ стоят в нашем поле точно также как они стоят в натуральном ряде чисел. И это всегда так согласно (АУ). Существуют ли другие числа?

Число $n < P$, число $n + k \leq P$. Очевидно, что $k < P$. Перепишем выражение (5) таким образом:

$$\frac{k(n + (n + k) - 3)}{2}.$$

Тогда справедливо такое неравенство:

$$\frac{k(n + (n + k) - 3)}{2} < \frac{P(2P - 3)}{2} < P^2.$$

Поделив каждую часть этого неравенства на P получаем:

$$\frac{k(n + (n + k) - 3)}{2P} < \frac{2P - 3}{2} < P.$$

А это значит, что выражение (5) ни при каких n и k не может быть кратно P . За исключением случая $n = k = 1$. Следовательно и чисел n и k , удалённых друг от друга на расстояние $(k - 1)$ клетка, в нашей расстановке не существует.

Теперь вернёмся к доказательству следствия 1.

Пойдём обратным путём. Пусть клетка с числом n имеет порядковый номер n . Отгалкиваясь от этого номера пронумеруем остальные клетки. Идя по часовой стрелке от номера n будем присваивать номера $(n + 1)$, $(n + 2)$, ... , P , а идя против часовой стрелки - $(n - 1)$, $(n - 2)$, ... , 1 . Т.е. всегда будем иметь клетку с каким-то числом, у которой порядковый номер 1. Пример: $n = 3$, $P = 8$.

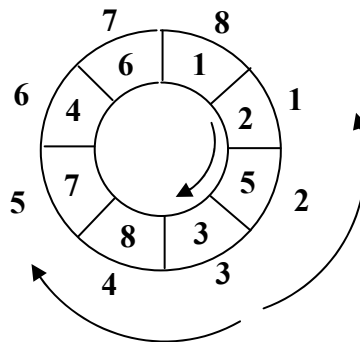


Рис. 11

Т.е., начиная нумерацию с клетки с числом 2 , получим картину, как на Рис.11, где клетка с числом 3 имеет порядковый номер 3 .

Может ли быть такая ситуация? Клетка с числом n и клетка с числом $(n + k)$ имеют порядковые номера n и $(n + k)$ соответственно. Только, что мы доказали, что этого быть не может, за исключением, когда нумерация клеток начинается с клетки с числом 1 . В этом случае клеткам с числами 1 и 2 будут присвоены их собственные порядковые номера. Т.о. для любого n всегда найдётся клетка с числом m , такая, что начиная с этой клетки нумерацию, получим для клетки с числом n порядковый номер n .

Однако заметим, что у нас различных чисел $n = P$, но клеток с числом m мы получили $P-1$, т.к. в двух случаях при $n = 1$ и $n = 2$ получаем одну и ту же нумерацию клеток нашего поля.

Иначе говоря, следствие 1 имеет при каком-то m исключение, т.е. имеется такая нумерация клеток, что ни одна клетка не имеет порядкового номера, равного числу, которое стоит в этой клетке.

Действительно: при $X = \frac{P}{2} + 1$, $q = \frac{P}{2}$ получаем такие решения уравнения (4):

$$n_1 = P + 1; \quad n_2 = -P + 2.$$

Но $1 \leq n \leq P$, т.е. ни одно решение нас не удовлетворяет.

Следствие 1 доказано.

Следствие 2.

Сумма чисел, стоящих в клетках, разность порядковых номеров которых равна $\frac{P}{2}$, постоянна и равна $P + 1$.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать это следствие. Наше доказательство мы покажем чуть позже, а сейчас рассмотрим клеточные поля, имеющие период $P = 2^{2k}$. Такие поля можно представлять в виде квадратов.

Пример: $P = 2^k$, $k = 4$.

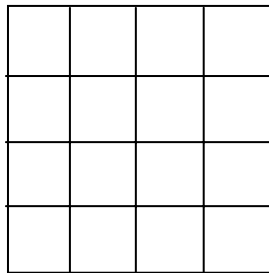


Рис. 12

Заполнять числами такие поля используя (АУ) будем построчно слева-направо и от строки к строке переходя сверху вниз. Договоримся считать также, что за последней правой нижней клеткой идет следом левая верхняя, т.е. наше квадратное поле будем считать тоже замкнутым.

Пронумеруем наше поле от 1 до P , начиная с любой клетки.

Пример: $\frac{P}{2} = 8$.

| | | | |
|----|----|----|----|
| 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 |

Рис. 13

Заметим, что клетки, разность порядковых номеров которых равна $\frac{P}{2} = 8$, стоят в одном и том же столбце. Например 5-ая и 13-ая клетка находятся во втором столбце. Очевидно, что как бы мы не смещали нумерацию клеток, это всегда будет так.

Т.о., заполнив такое поле по правилам (АУ) мы получим квадрат, сумма чисел по столбцам у которого всегда будет постоянной согласно следствия 2.

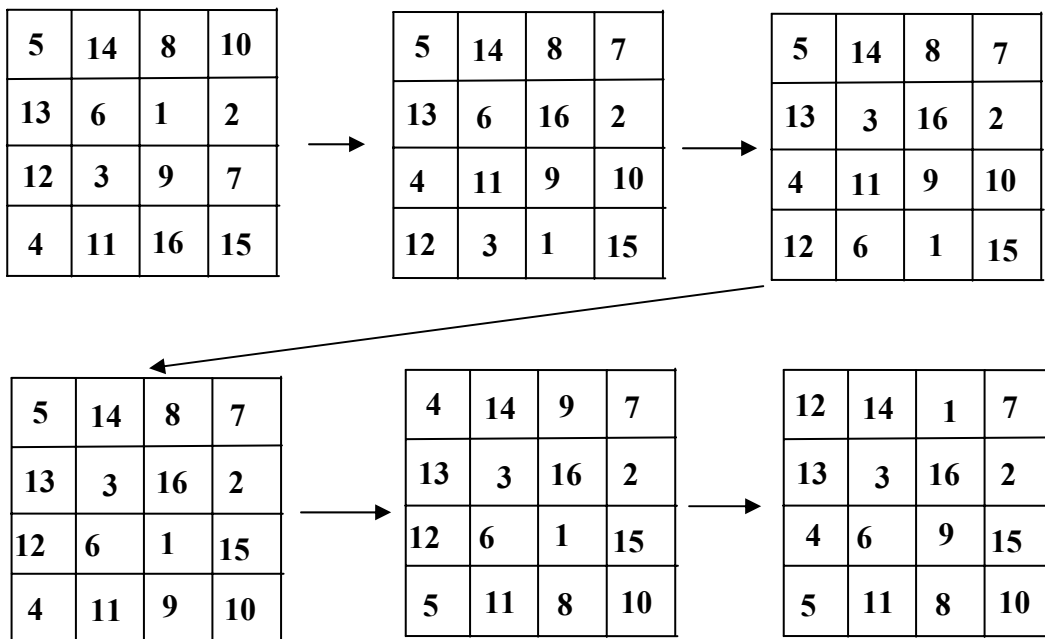
Пример:

| | | | |
|----|----|----|----|
| 5 | 14 | 8 | 10 |
| 13 | 6 | 1 | 2 |
| 12 | 3 | 9 | 7 |
| 4 | 11 | 16 | 15 |

Рис. 14

При определённой сноровке, меняя местами числа, стоящие в столбцах, можно получить магический квадрат.

Пример:



Магический квадрат

Рис. 15

В данном примере нам понадобилось провести пять замен, чтобы получить магический квадрат. В первой замене мы поменяли местами числа 12 и 4, 3 и 11, 1 и 16, 7 и 10. Во второй – 6 и 3. В третьей замене поменяли местами строки 3 и 4. Затем местами обменялись числа 4 и 5, 8 и 9. И в последнем случае меняем местами числа 4 и 12, 1 и 9.

Мы думаем, что читатель уже справился с доказательством следствия 2 и теперь может сравнить его с нашим доказательством.

Доказательство следствия 2.

Представим, что у нас имеется достаточно длинное не замкнутое клеточное поле, такое что мы можем упаковать в него от **1** до **P** чисел, используя (АУ).

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|--|---|--|--|---|--|--|--|---|-----|-----|--|-----|---|
| 1 | 2 | | 3 | | | 4 | | | | 5 | ... | P-1 | | ... | P |
|---|---|--|---|--|--|---|--|--|--|---|-----|-----|--|-----|---|

Рис.16

Число клеток такого поля равно:

$$\frac{1+(P-1)}{2}(P-1)+1 = \frac{P(P-1)}{2}+1. \quad (6)$$

Если $P = 2^k$, то, взяв замкнутое поле периода P , по правилам (АУ) можно упаковать в него от **1** до P чисел. Нас интересует какой порядковый номер будет иметь клетка с числом P , если нумерацию начать с клетки, где стоит число **1**. Очевидно, что разделив значение выражения (6) на P , мы в остатке получим число, которое и является порядковым номером клетки с числом P . Преобразуем выражение (6) таким образом:

$$\frac{P(P-1)}{2}+1 = \frac{P^2-P+2}{2} = \frac{(P^2-2P)+2P-P+2}{2} = \frac{P(P-2)+P+2}{2}.$$

Разделив его на P получаем:

$$\frac{P-2}{2} + \frac{\frac{P}{2}+1}{P}.$$

Число $\frac{P-2}{2}$ всегда целое, $\frac{P}{2}+1 < P$. Следовательно остатком от деления выражения (6) на P будет число $\frac{P}{2}+1$ - порядковый номер клетки с числом P . Разность порядковых номеров клеток, где стоят числа **1** и P равна $\frac{P}{2}$, а сумма этих чисел равна $P+1$. Т.е. для чисел **1** и P следствие 2 справедливо. Мы помним, что начинали нумерацию с клетки с числом **1**. Рассмотрим снова поле Рис.16.

Где-то в нём стоят числа k и $P-k+1$. Мы считаем, что это поле уже заполнено по правилам (АУ). Определим, сколько данное поле будет иметь клеток от клетки с числом k до клетки с числом $P-k+1$, включая их самих.

$$\frac{(k+P-k)(P-2k+1)}{2}+1 = \frac{P(P-2k+1)+2}{2} = \frac{P(P-2k)+P+2}{2}.$$

Поделив это выражение на P получим в остатке $\frac{P}{2}+1$. Если нумерацию замкнутого поля начать с клетки с числом k , то клетка с числом $P-k+1$ будет иметь порядковый номер $\frac{P}{2}+1$. Очевидно, что как бы мы не смещали нумерацию клеток,

разность порядковых номеров клеток с числами k и $P-k+1$ всегда остаётся $\frac{P}{2}$. Это и доказывает справедливость следствия 2.

Мы закончили рассмотрение замкнутых клеточных полей, которые заполняются по правилам (АУ) Может быть читатель захочет продолжить начатые здесь исследования. Тогда мы советуем ему попробовать разработать алгоритм перестройки квадратного поля в магический квадрат, как это было показано в примере на Рис. 15. Нам не удалось найти такого общего алгоритма, а может быть, его и не существует. Предлагаем это выяснить читателю.

А сейчас познакомимся с ещё одним алгоритмом, при помощи которого можно упаковать тоже замкнутое клеточное поле.

Рассмотрим такое клеточное поле.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|---|--|--|--|--|---|--|--|--|--|--|--|--|
| 1 | | 2 | | | | | 3 | | | | | | | |
|---|--|---|--|--|--|--|---|--|--|--|--|--|--|--|

Рис. 17

Здесь между числом n и числом $n+1$ имеется ровно n^2 клеток. Выведем формулу для определения места числа n на таком поле.

Число 1 стоит на первом месте. Число 2 стоит на месте $1+1^2+1$. Число 3 стоит на месте $1+1^2+1+2^2+1$. Число 4 стоит на месте $1+1^2+1+2^2+1+3^2+1$.

Легко просматривается зависимость:

$$n \xrightarrow{f(n)} n + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2).$$

Для суммы ряда $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ известна формула

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (7)$$

Подставим в это выражение вместо n число $(n-1)$, получим:

$$\frac{(n-1)(n+1-1)(2n-2+1)}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

А из этого получаем такую формулу:

$$f(n) = n + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}. \quad (8)$$

Т. е. имеем такой ряд: 1, 3, 8, 18, 35, 61, 98, 148, 213, 295, 396, 518, ...

Разделим каждый член этого ряда на 11 и построим новый ряд остатков от деления в соответствии с первым рядом.

$$1, 3, 8, 7, 2, 6, 10, 5, 4, 9, 11, 1, \dots$$

Как видим, первые одиннадцать членов этого ряда - это числа от 1 до 11. Т.о., если взять замкнутое клеточное поле из 11 клеток и вписать в него числа от 1 до 11, в соответствии с местом, указанным вторым рядом (т.е. $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 8, 4 \rightarrow 7, \dots, 11, 11$ на 11-ом месте), то получим такую картину:

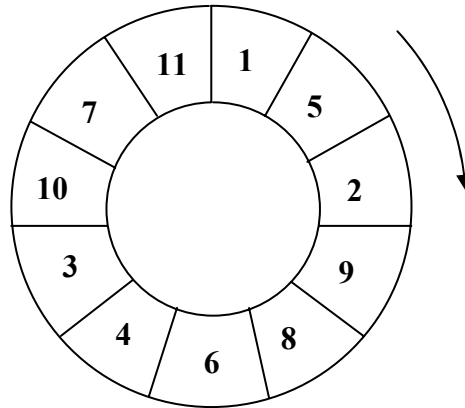


Рис. 18

Здесь между числом n и числом $n+1$ расположено ровно n^2 клеток (т.е. если например после числа 5 отсчитать 25 клеток, идя по часовой стрелке, то следующей клеткой будет клетка с числом 6).

Мы видим, что числа 1, 6, 11 стоят на своих местах. Это не трудно доказать. Для этого надо решить уравнение:

$$11k + n = n + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

или

$$11k = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Это тоже диофантово уравнение, а решать мы их не умеем. Но среди 11-ти чисел не трудно сделать визуальную проверку подставляя по очереди вместо n числа от 1 до 11: при $n = 1$ получаем $k = 0$, при $n = 6$ получаем $k = 5$, $n = 11$ получаем $k = 35$. Вычислим разность $f(n+11) - f(n)$.

$$n+11 + \frac{(n+11)(n+10)(2n+21)}{6} - n - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = 11(n^2 + 10n + 36).$$

Т.е. получаем число кратное 11-ти. А это значит, что ряд остатков периодичен через 11 чисел. Отсюда следует, что в замкнутое поле из 11-ти клеток можно упаковать любую последовательность натуральных чисел начиная от числа n и кончая числом $n + 11$, так, чтобы расстояние между k и $(k + 1)$ числом было k^2 клеток.

Подметим ещё одну особенность поля, показанного на Рис.18. Если клетку с числом 1 считать за начало кольца, то сумма чисел, стоящих в клетках, равноудалённых от начала и конца поля, будет постоянна и равна $1 + 11 = 12$.

Заметим, что по такому алгоритму можно упаковать замкнутые поля из 3 и 4 клеток.

Но эти поля отличаются от полл с 11-ью клетками тем, что они не "замкнуты". Т. е. максимальное число поля не попадает в клетку с максимальным порядковым

номером. Если после клетки с числом **3** пропустить **9** клеток, то мы получим клетку с числом **2**, а не клетку с числом **1**, как это получается для поля с 11-ью клетками. И точно так же обстоит дело с полем из 4 клеток. Советуем читателям убедиться в этом самостоятельно.

Существует бесконечно много полей, заполняющихся по такому алгоритму. Попробуйте отыскать какие-нибудь из них. Вручную эта задача очень трудоёмка. Но если привлечь компьютер, то это здорово облегчит ваш труд.

В заключение этой главы рассмотрим ещё одну упаковку клеточных полей.

В этой части мы столкнёмся с различными системами счисления. Различные системы счисления оперируют различным набором цифр, из которых строятся потом числа.

В привычной нам десятичной системе счисления мы имеем десять цифр (потому система счисления и называется десятичной): **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**. Любое число может быть однозначно представлено комбинацией, составленной из некоторых этих цифр.

Основанием системы счисления называется число цифр, используемых в этой системе. Как связано основание системы счисления с каким-то конкретным числом?

Возьмём наугад любое натуральное число. Например, **1478**. Используя основание системы счисления его можно представить таким образом:

$$1478 = 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.$$

Предположим, что мы решили узнать, как будет выглядеть число **1478** в пятиричной системе счисления. Т. е. в системе, где имеется всего пять цифр: **0, 1, 2, 3, 4**.

Чтобы перевести число **1478** из десятичной системы счисления в пятиричную, надо проделать цепочку таких операций.

Разделим число **1478** на число **5**. Получим частное **295** и остаток **3**. Число **295** больше числа **5**, поэтому снова делим его на **5**. Получаем частное **59** и остаток **0**. Число **59** больше 5-ти. Поэтому продолжаем делить на **5**. Получаем частное **11** и остаток **4**. И, наконец, последний раз число **11** делим на **5**, получаем частное равно **2** и остаток **1**. Теперь запишем последовательно полученные цифры, начиная с последнего частного и за ним все полученные остатки. Т. е. получаем:

$$21403_5 = 1478.$$

Т.о. в пятиричной системе счисления число **1478** будет иметь вид **21403₅**. Индекс **5** внизу числа указывает на основание системы счисления. Если такой индекс отсутствует, то подразумевается наша привычная десятиричная система счисления.

Теперь покажем обратную операцию. Пусть у нас есть число **21403₅** в пятиричной системе счисления. Мы хотим узнать, как это число будет выглядеть в десятиричной, т.е. нашей родной системе счисления.

$$21403_5 = 2 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 1478.$$

В переводе чисел из одной системы счисления в другую нет ничего сложного, поэтому читатель, проделав самостоятельно несколько таких примеров, быстро "набьёт" себе руку" в этом деле.

Теперь приступам к рассмотрению ещё одной упаковки. Начнём с конкретного примера. Покажем все числа от нуля до 7 включительно двоичной системы счисления, т.е. системы, где используются всего две цифры 0 и 1. для представления чисел. Т.к. максимальное здесь число 7 в двоичной системе счисления имеет три разряда (111), то и другие числа мы дополнили спереди нулями, чтобы не нарушать разрядности.

0 – 000, 1 – 001, 2 – 010, 3 – 011, 4 – 100, 5 – 101, 6 – 110, 7 – 111.

Рассмотрим замкнутое клеточное поле, в каждую клетку которого по какому-то закону, пока нам неизвестному, поставлена какая-то цифра двоичной системы счисления, либо 0, либо 1.

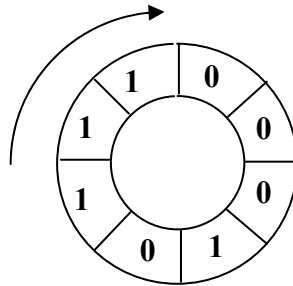


Рис. 19

Будем выписывать последовательные тройки цифр из этого поля, двигаясь по часовой стрелке. Начинать можно с любой клетки. Пусть это будет клетка под номером 1, как показано на Рис.19.

Первая тройка цифр даст число **101**. Сместившись на одну клетку по часовой стрелке, выпишем следующую тройку. Это число **011**. И т.д.. Далее получаем: **111, 110, 100, 000, 001, 010**. Как видим, мы получили первые 8 чисел от 0 до 7 двоичной системы счисления. Т.о. на Рис.19 представлено 8-клеточное поле, в котором некоторым хитрым образом упакованы цифры двоичной системы счисления, которые последовательно образуют первые 8 чисел этой системы счисления.

Введём обозначения трёх характеристик нашего замкнутого поля: ***K*** - количество клеток в поле, ***P*** - основание системы счисления, ***n*** - разрядность чисел, упакованных в данном поле. Для каждого поля ***n*** - всегда является константой. В данном примере ***n* = 3**.

Оказывается, что ***K***, ***P*** и ***n*** связаны простым, соотношением:

$$P^n = K . \quad (9)$$

Действительно, предположим, что в поле из ***K*** клеток упакованы все числа от 0 до ***K* – 1** ***P***-ичной системы счисления. Обозначим элементы этой системы счисления (СС) через ***q_i*** :

$$\{ q_1; q_2; \dots; q_P; \} .$$

В десятичной системе счисления элементы ***q_i*** называются цифрами. Предположим, что в данном поле упакованы числа, разрядность которых равна ***n***.

Тогда максимальное число имеет вид: $\underbrace{q_P; q_P; \dots; q_P}_{n} \dots$ Это и есть число ***K* – 1**. Т.е. можем записать:

$$K - 1 = q_p (P^{n-1} + P^{n-2} + \dots + P + 1).$$

Выражение в скобках ни что иное, как геометрическая прогрессия, сумму которой мы можем вычислить.

$$1 + P + P^2 + \dots + P^{n-2} + P^{n-1} = \frac{P^n - 1}{P - 1};$$

$$K - 1 = \frac{P^n - 1}{P - 1}.$$

Но $q_p = P - 1$. Это справедливо для любой (СС). Отсюда: $K - 1 = P^n - 1$ и $P^n = K$.

Т.о., предположив, что такая упаковка существует, мы доказали, что она должна состоять из P^n клеток, где P - основание (СС), n - разрядность чисел.

Теперь докажем существование такой упаковки. Составим ряд из чисел от 0 до $P^n - 1$.

$$\underbrace{\underbrace{0 \dots 0}_n, \underbrace{0 \dots 0 1}_{n-1}, \dots, \underbrace{q_p \dots q_p 0}_{n-1}, \dots, \underbrace{q_p \dots q_p}_n}_{P^n} \quad (10)$$

Всего P^n чисел. Каждое число имеет разрядность равную n .

Выберем произвольно начальную клетку поля. Поместим в первые n клеток число $\underbrace{0 \dots 0}_n$, а в последние n клеток число $\underbrace{q_p \dots q_p}_n$.

Вычеркнем из ряда (10) числа: $\underbrace{0 \dots 0}_n, q_p \underbrace{0 \dots 0}_{n-1}, q_p q_p \underbrace{0 \dots 0}_{n-2}, \dots, \underbrace{q_p \dots q_p}_{n-1} 0, \underbrace{q_p \dots q_p}_n$, т.

к. они уже упакованы в нашем поле. Всего $n + 1$ число. Разрежем наше поле на границе чисел $\underbrace{0 \dots 0}_n$ и $\underbrace{q_p \dots q_p}_n$ и представим его в виде строки, состоящей из клеток. Мы будем двигаться по ней слева направо.

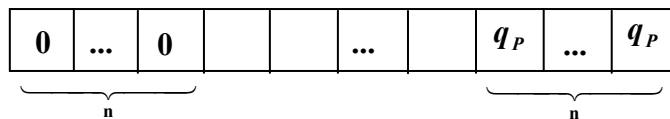


Рис. 20

Для заполнения этого поля используем следующий алгоритм. Назовём его алгоритмом "наименьшего следующего" или сокращённо (НС). Выберем наименьшее число из ряда (10), которое может стоять за числом $\underbrace{0 \dots 0}_n$ и ещё не вычеркнуто. Это число $\underbrace{0 \dots 0 1}_{n-1}$. Вписываем в очередную клетку поля цифру 1 и вычёркиваем число $\underbrace{0 \dots 0 1}_{n-1}$ из ряда (10). И т.д..

Предположим, что следуя такому алгоритму, невозможно упаковать все числа ряда (10). Это значит, что на некотором этапе упаковки поля будет стоять число N , такое, что добавляя справа любой элемент (цифру) q_i мы не получим числа, которое бы ещё не было вычеркнуто из ряда (10). Другими словами:

Пусть число $N = a_1 a_2 \dots a_n$, где $a_i \in \{q_1; q_2; \dots; q_p\}$. Из этого следует, что все числа $a_2 \dots a_n q_1, a_2 \dots a_n q_2, \dots, a_2 \dots a_n q_p$ (всего P чисел), уже вычеркнуты из ряда (10), т.е. уже имеются в нашей упаковке. Предположим, что a_i не все равны между собой, тогда ни одно из чисел $a_2 \dots a_n q_i$ не совпадает с числом N , а расположены где-то перед ним. Но тогда, следовательно, в поле также стоят и числа $q_1 a_2 \dots a_n, q_2 a_2 \dots a_n, \dots, q_p a_2 \dots a_n$ (всего P чисел) и ещё число $N = a_1 a_2 \dots a_n$ - последнее. Но это значит, что в ряду (10) находилось, по крайней мере, два одинаковых числа, т.к. $a_i \in \{q_1; q_2; \dots; q_p\}$, а это противоречит условию построения ряда (10).

Рассмотрим другую ситуацию, когда элементы a_i все равны между собой, т.е. $N = a_i a_i \dots a_i$, $a_i \neq q_p$ т.к. число $\underbrace{q_p \dots q_p}_n$ уже стоит в поле, т.е. $0 < a_i < q_p$. Тогда где-то впереди должно стоять число $a_i \dots a_i q_p$, т.к. мы предположили, что за числом N поставить уже ничего не возможно. Но это будет противоречить алгоритму (НС), т.к. число $\underbrace{a_i \dots a_i}_{n-1} q_p > \underbrace{a_i \dots a_i}_n$. Следовательно, предположение о невозможности существования такой упаковки не верно. Т.о. мы доказали существование упаковки. Этим также доказывается и справедливость алгоритма (НС).

Теперь можно сформулировать общую **теорему**:

Если дана система счисления с основанием P , то K последовательных чисел от 0 до $K - 1$ этой системы счисления, представленных n разрядами, можно упаковать в замкнутое клеточное поле, состоящее из K клеток, причём, одной клетке соответствует один разряд числа и $K = P^n$.

Для примера составим ещё одну упаковку для $P = 10, n = 2$.

Такое поле должно состоять $K = P^n = 10^2 = 100$ клеток. Для удобства представим поле в виде строк, по двадцать клеток в каждой Рис.63.

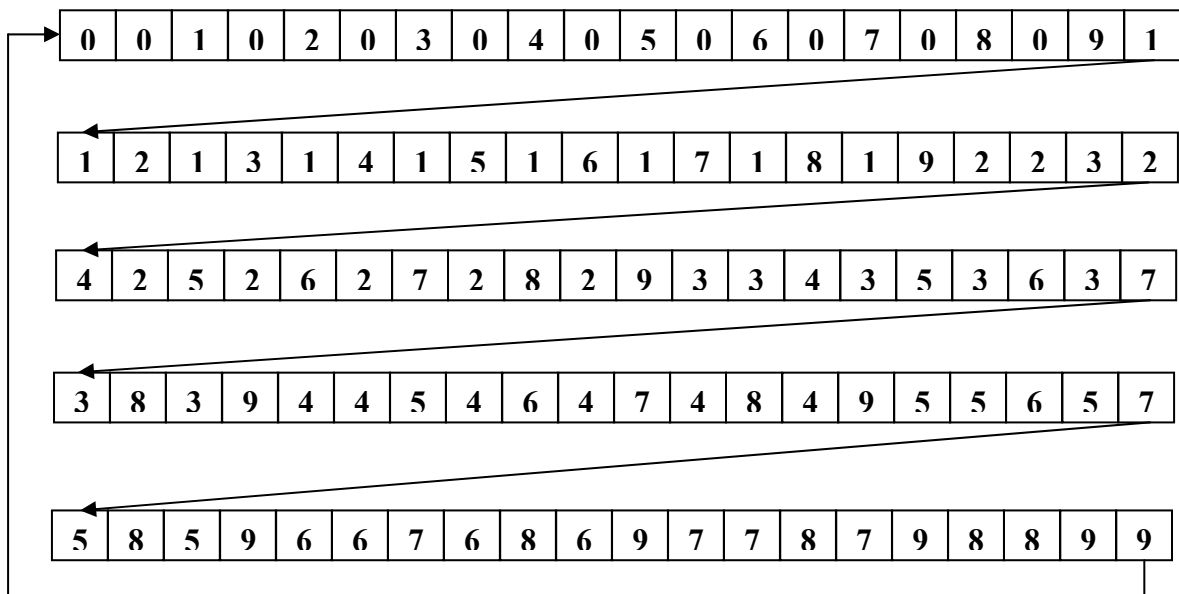


Рис. 21

В этом поле упакованы числа десятичной системы счисления от 00 до 99 .

Замкнутое клеточное поле удобно представлять в виде орграфа. И, анализируя такой граф, можно оценить, единственным ли образом можно заполнить данное поле.

Рассмотрим несколько примеров.

Пусть нам необходимо построить упаковку для двоичной системы счисления ($P = 2$) и двухразрядных чисел ($n = 2$). Т.е. $K = P^n = 4$. Значит, в нашем поле из 4-х клеток должны стоять числа от 0 до 3, а именно: 00, 01, 10, 11.

Число 00 может соседствовать с числом 00 либо 01. Число 01 - с числом 10 либо 11. Число 10 - с числом 00, либо 01. А число 11 – с числом 10 либо с числом 11.

Если слово «соседствовать» заменить стрелочкой, то можно построить такой орграф (ориентированный граф. Подробнее о графах мы будем говорить в пятой главе).

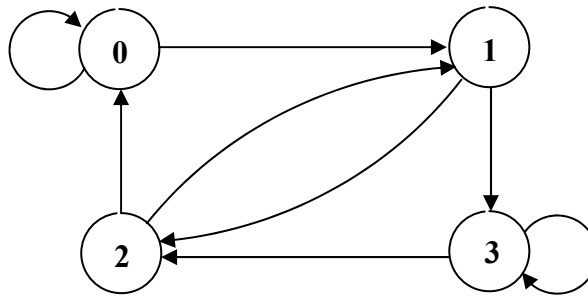


Рис. 22

Здесь 0 - 00, 1 - 01, 2 - 10, 3 - 11. Структура, показанная на Рис. 64 и называется орграфом.

Чтобы теперь построить интересующую нас упаковку, необходимо отыскать на данном орграфе гамильтонов путь. Т.е. замкнутый путь обхода по всем вершинам графа. При этом в каждой вершине надо побывать один раз и вернуться в исходную вершину. В данном случае - это можно сделать единственным образом: $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 0$.

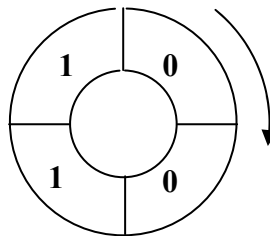


Рис.23

Эта упаковка соответствует алгоритму (НС).

Построим орграф для случая $P = 2, n = 3, K = 8$.

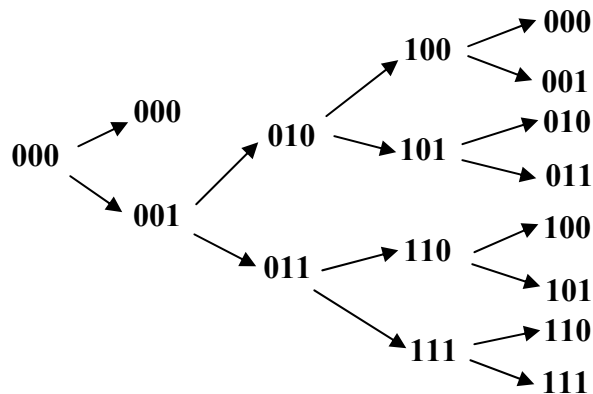


Рис. 24

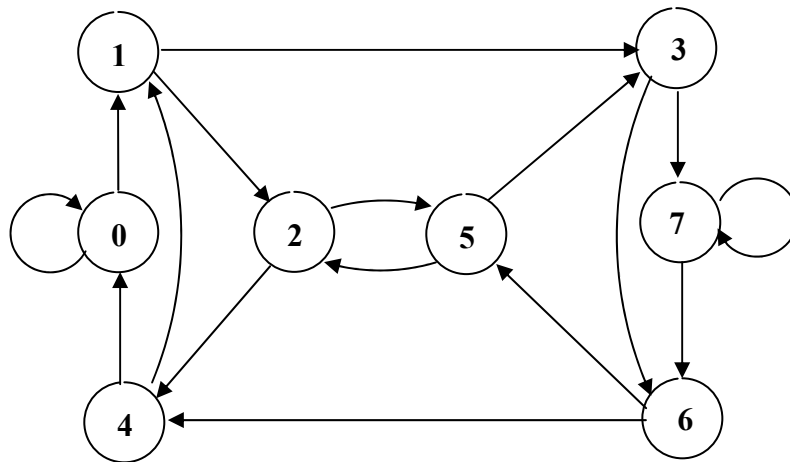


Рис. 25

Для такого графа существует два гамильтоновских пути:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 0.$$

Т. о. поле из 8 клеток можно упаковать двумя способами, первый из которых и есть упаковка по алгоритму (НС).

С увеличением P и n число гамильтоновых путей на орграфе резко возрастает. Причём, какой-то явной закономерности числа путей от P и n , по крайней мере, на первый взгляд заметить не удастся. Может быть, это удастся сделать читателю.

Для $P = 2$, $n = 4$ мы получаем уже 16 гамильтоновых путей, а при $P = 3$, $n = 2$ их уже будет 24.

Рекомендуем читателю самостоятельно построить соответствующие орграфы.

В заключение докажем одну небольшую теорему о сумме чисел, упакованных в замкнутом клеточном поле.

Теорема:

Если дано замкнутое клеточное поле и направление его обхода. И в каждую клетку данного поля вписан произвольный элемент $a_i \in \{0; 1; \dots; q_p\}$, P - ичной системы счисления, то сумма чисел, каждое из которых представлено в данном поле n последовательными элементами, вычисляется по формуле:

$$S = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{P - 1} (P^n - 1), \quad (11)$$

где K – количество клеток в поле (Рис. 26).

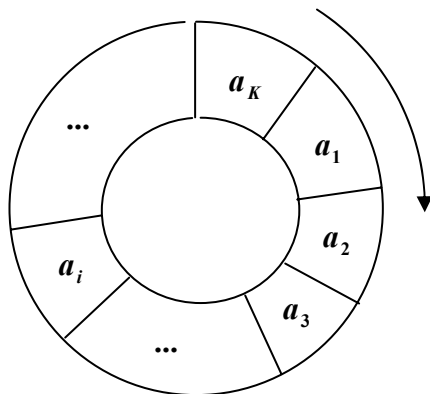


Рис. 26

Доказательство:

Составим выражение для суммы чисел в данном поле:

$$\begin{aligned}
 S &= a_1 P^{n-1} + a_2 P^{n-2} + \dots + a_{n-1} P + a_n + \\
 &+ a_2 P^{n-1} + a_3 P^{n-2} + \dots + a_n P + a_{n+1} + \dots + \\
 &+ a_{k-n+1} P^{n-1} + a_{k-n+2} P^{n-2} + \dots + a_{k-1} P + a_k + \dots + \\
 &+ a_k P^{n-1} + a_1 P^{n-2} + a_2 P^{n-3} + \dots + a_{n-2} P + a_{n-1}.
 \end{aligned}$$

После перегруппировки и приведения подобных членов, получаем:

$$S = (a_1 + a_2 + \dots + a_k) \cdot (P^{n-1} + P^{n-2} + \dots + P + 1).$$

Второй сомножитель представляет собой геометрическую прогрессию из n членов. Сумма такой прогрессии равна $\frac{P^n - 1}{P - 1}$. Окончательно получаем:

$$S = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{P - 1} (P^n - 1).$$

Что и требовалось доказать.

Пример: Пусть дано поле из 9-ти клеток. $P = 10, n = 2$.

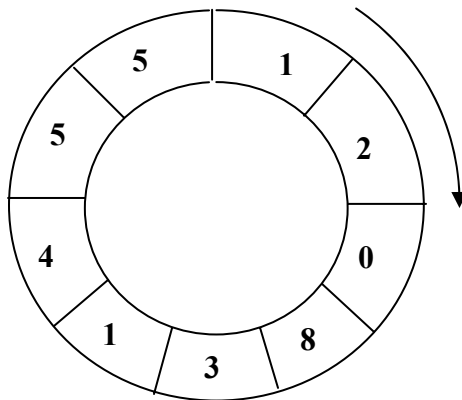


Рис. 27

Выпишем числа, упакованные в данном поле, и найдём их сумму.

$$S = 12 + 20 + 08 + 83 + 31 + 14 + 45 + 55 + 51 = 319.$$

С другой стороны, воспользовавшись формулой (11), можно получить сумму этих чисел не выписывая сами числа.

$$S = (1 + 2 + 0 + 8 + 3 + 1 + 4 + 5 + 5) \frac{10^2 - 1}{10 - 1} = 319.$$