Франц Герман

Шестиугольники и прямые Паскаля

(www.franz-hermann.com)

1. Введение

Одной из самых ключевых, и возможно самой красивой теоремой проективной геометрии, является теорема Паскаля. Написана не одна сотня работ посвящённых геометрическим исследованиям, связанным с этой теоремой. И, наверное, ни один из выдающихся геометров прошлого столетия не обошёл своим вниманием теорему Паскаля.

Формулировка теоремы красива и лаконична. Удивительно то, что теорема Паскаля почему-то не была открыта древними математиками, такими как Эвклид, Пифагор, Птолемей и др., хотя частный её случай – теорема Паппа – был уже известен в III веке. Но это уже вопрос истории науки.

Одной из проблем, связанных с теоремой Паскаля, посвящена и данная работа. Упоминания об этой проблеме можно встретить во многих книгах по геометрии и математических энциклопедиях.

Суть проблемы проста. Если на произвольной конике взято шесть точек, то соединить их в замкнутый шестиугольник возможно 60-ю различными способами (см. Приложение 2). Для каждого такого шестиугольника существует своя прямая Паскаля, определяемая теоремой Паскаля. Множество всех прямых Паскаля образуют сложную конфигурацию взаимных пересечений. Существуют точки, где пересекаются по три и по четыре прямых Паскаля. Отысканию этих точек и посвящена данная работа.

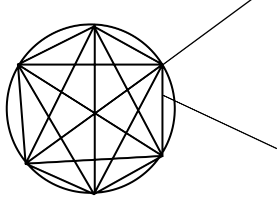
Известные геометры прошлого века Я. Штейнер, Ю. Плюккер, Л. Гессе, Т. Киркман и др. более 20 лет занимались этой проблемой. Штейнер нашёл 20 точек, где пересекаются по три прямые Паскаля, а спустя 21 год Киркман отыскал ещё 60 таких точек.

В данной работе мы покажем, как можно было бы решить эту проблему в наше время, используя современный математический аппарат теории множеств, теории алгебраических подстановок и теории графов.

В заключение мы попробуем провести анализ и пофантазировать на тему, почему Якоб Штейнер нашёл только 20 точек.

2. Некоторые вспомогательные сведения

Для простоты и наглядности иллюстраций в качестве образа произвольной коники ниже будем использовать окружность, с расположенными на ней шестью точками. Точки будем обозначать для общности через $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



a_i

$K = \{q_1, q_2, \dots, q_{15}\}$

$q_j = (a_i a_k)$;

Рис.1

Объектом нашего исследования также будет множество $\boldsymbol{K}$ сторон (рёбер) полного графа $\boldsymbol{K}_6$ (Рис. 1).

Для элементов множества $\boldsymbol{K}$ будем использовать операции теории множеств:

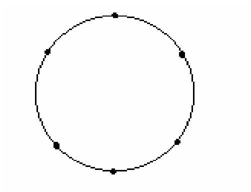
1. $\cap$ - пересечение
2. $\cup$ - объединение
3. $\setminus$ - разность
4. Δ - симметрическая разность

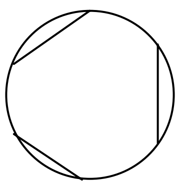
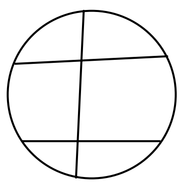
Напомним основные равенства для этих операций:

1. $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$;
2. $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}$;
3. $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$;
4. $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}$;
5. $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$;
6. $\boldsymbol{A}\, \Delta\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$;
7. $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}$;
8. $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}$;
9. $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})$;
10. $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C})$;
11. $\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})$;
12. $\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C})$;
13. $\boldsymbol{A}\, \Delta\, \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \setminus (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$;

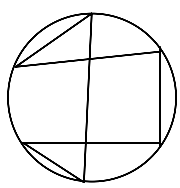
Равенство 13 является определением симметрической разности.

Проиллюстрируем некоторые из этих правил. Пустым множеством в данном случае будет коника с шестью точками, т.е.

0: 

Пусть $\boldsymbol{K}_1$:  , $\boldsymbol{K}_2$:  ,

тогда $\boldsymbol{K}_1 \cap \boldsymbol{K}_2 = \boldsymbol{0}$;

$\boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2 = \boldsymbol{K}_3$, $\boldsymbol{K}_3$:  ,

$\boldsymbol{K}_3 \setminus \boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{K}_2$.

Рис.2

3. Теорема о циклических шестиугольниках

Множество всех замкнутых шестиугольников обозначим через $\boldsymbol{A} = \{ \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_{60} \}$ (Приложение 2).

Покажем все варианты расположения трёх отрезков (сторон шестиугольника) на конике, не имеющих общих граничных точек. Для вычисления числа вариантов $\boldsymbol{V}$ воспользуемся формулой (п1) (Приложение 1). Здесь $\boldsymbol{n} = \mathbf{6},\ \boldsymbol{k} = \mathbf{3}$.

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k} C^{2}_{n-2(i-1)} = \frac{1}{3!}\cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 15$$

Обозначим их через $\boldsymbol{K}_i$, как подмножества полного множества $\boldsymbol{K}$.

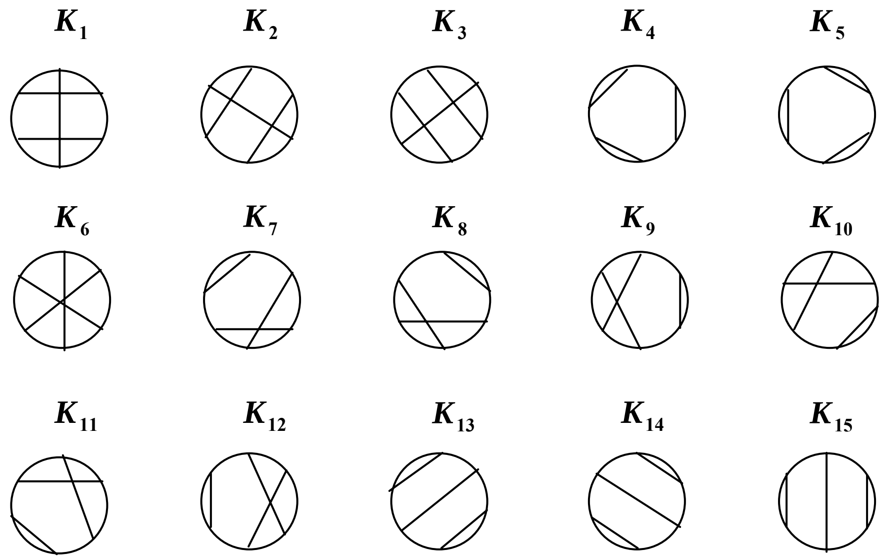


Рис.3

Очевидно, что всякий шестиугольник $\boldsymbol{A}_k$ является объединением двух подмножеств $\boldsymbol{K}_i \cup \boldsymbol{K}_j$, причём такое объединение строго однозначно.

Будем говорить, что шестиугольники $\boldsymbol{A}_k$ принадлежат к классу $[\boldsymbol{K}_i]$ по конкретному подмножеству $\boldsymbol{K}_i$ если справедливы равенства:

1. $\boldsymbol{K}_i \cup \boldsymbol{K}_j = \boldsymbol{A}_k$,
2. $\boldsymbol{K}_i \cap \boldsymbol{K}_j = \mathbf{0}$.

Вообще говоря, равенства 1 и 2 равносильны, т.к. из $\boldsymbol{K}_i \cup \boldsymbol{K}_j = \boldsymbol{A}_k$ следует, что $\boldsymbol{K}_i \cap \boldsymbol{K}_j = \mathbf{0}$ и обратно: из равенства 2 следует равенство 1.

Для примера выпишем все шестиугольники класса $[\boldsymbol{K}_4]$.

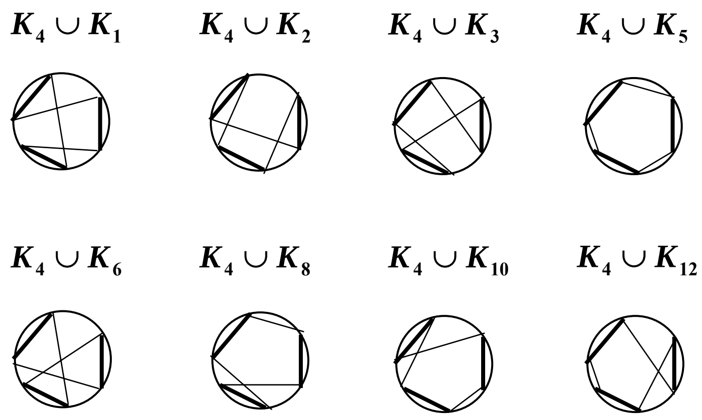


Рис. 4

$$[K_4]=\{A_{25}, A_{21}, A_{23}, A_1, A_{60}, A_7, A_3, A_5\}$$

Не трудно убедиться, что каждый класс $[K_i]$ состоит из 8-ми элементов (шестиугольников).

Рассмотрим два элемента из класса $[K_i]$: $(K_i \cup K_j)$ и $(K_i \cup K_n)$ такие, что $(K_j \cap K_n)=0$. Найдём симметрическую разность этих элементов.

$$\begin{aligned}
&(K_i \cup K_j)\Delta(K_i \cup K_n)=((K_i \cup K_j)\cup(K_i \cup K_n)\setminus((K_i \cup K_j)\cap(K_i \cup K_n))=\\
&=(K_i \cup K_j \cup K_i \cup K_n)\setminus(((K_i \cup K_j)\cap K_i)\cup((K_i \cup K_j)\cap K_n))=\\
&=(K_i \cup K_j \cup K_n)\setminus(((K_i \cap K_i)\cup(K_j \cap K_i))\cup((K_i \cap K_n)\cup(K_j \cap K_n)))=\\
&=(K_i \cup K_j \cup K_n)\setminus(K_i \cup 0)=(K_j \cup K_n)
\end{aligned}$$

Как оказалось, элементы каждого класса $[K_i]$ образуют между собой 16 симметрических разностей типа:

$$(K_i \cup K_j)\Delta(K_i \cup K_n)=(K_j \cup K_n)\;; \qquad (1)$$

при условии, что $(K_j \cap K_n)=0$.

Равенство (1) обладает замечательным свойством цикличности, т.е.

$$\begin{aligned}
&(K_i \cup K_j)\Delta(K_i \cup K_n)=(K_j \cup K_n)\;;\\
&(K_i \cup K_n)\Delta(K_j \cup K_n)=(K_i \cup K_j)\;;\\
&(K_j \cup K_n)\Delta(K_i \cup K_j)=(K_i \cup K_n)\;.
\end{aligned}$$

В этом не трудно убедиться, глядя на предыдущие выкладки.

Шестиугольники равенства (1) будем называть **циклическими шестиугольниками**. Для них справедлива следующая

Теорема: прямые Паскаля циклических шестиугольников конкурентны.

Доказательство этой теоремы мы приведём позже. А сейчас выясним, сколько всего существует троек циклических шестиугольников.

Т.к. всего существует 15 классов $\left[\boldsymbol{K_i}\right]$ и элементы каждого класса образуют между собой 16 симметрических разностей типа (1), то получаем 240 троек циклических шестиугольников. Но в силу цикличности (1) получается, что каждое такое равенство может быть образовано элементами класса $\left[\boldsymbol{K_i}\right]$, элементами класса $\left[\boldsymbol{K_j}\right]$ и также элементами класса $\left[\boldsymbol{K_n}\right]$.

Т.о. всего различных троек циклических шестиугольников будет 80. Обозначим множество этих троек через $\boldsymbol{T}^3$.

Рассмотрим подмножество $\boldsymbol{K \setminus A_k}$. Докажем, что

$$\boldsymbol{K \setminus A_k = (K_i \cup K_j \cup K_n)}, \qquad (2)$$

причём для каждого $\boldsymbol{A_k}$ представление разности $\boldsymbol{K \setminus A_k}$ в виде объединения трёх подмножеств $\boldsymbol{(K_i \cup K_j \cup K_n)}$ является единственно возможным.

Доказательство:

Как было сказано ранее, множество $\boldsymbol{K}$ - это полный граф, имеющий 6 вершин и 15 рёбер (сторон). Шестиугольник $\boldsymbol{A_k}$ представляет собой граф из 6 вершин, являющийся простым циклом. Тогда $\boldsymbol{K \setminus A_k = X}$ - это регулярный граф степени 3, т.е. имеем граф из 6-ти вершин и 9-ти рёбер, где степень каждой вершины равна 3.

Из графа $\boldsymbol{X}$ всегда можно выделить простой цикл $\boldsymbol{A_m}$ (теорема Смита). Очевидно, что $\boldsymbol{A_m \neq A_k}$. Тогда граф $\boldsymbol{X \setminus A_m}$ будет иметь 6 вершин и 3 ребра, причём каждая вершина имеет степень 1. А это ни что иное как $\boldsymbol{K_i}$. В свою очередь $\boldsymbol{A_m = (K_j \cup K_n)}$, следовательно

$$\boldsymbol{K \setminus A_k = (K_i \cup K_j \cup K_n)}.$$

Докажем единственность такого объединения.

Предположим противное, т.е.

$$\boldsymbol{X = (K_i \cup K_j \cup K_n) = (K_p \cup K_q \cup K_r)}.$$

Здесь $\boldsymbol{K_i \cap K_j = 0}$, $\boldsymbol{K_i \cap K_n = 0}$, $\boldsymbol{K_j \cap K_n = 0}$ и также $\boldsymbol{K_p \cap K_q = 0}$, $\boldsymbol{K_p \cap K_r = 0}$, $K_q \cap K_r = 0$. И следовательно, имеем 6 различных шестиугольников, являющихся простыми циклами регулярного графа $\boldsymbol{X}$.

Из теории графов известно, что всякий регулярный граф степени 3 из 6-ти вершин изоморфен либо графу $\boldsymbol{G_1}$, либо графу $\boldsymbol{G_2}$.

Рис.5

Граф $\boldsymbol{X}$ не может быть изоморфен графу $\boldsymbol{G_1}$, т.к. $\boldsymbol{K / G_1 \neq A_k}$. Следовательно, граф $\boldsymbol{X}$ изоморфен графу $\boldsymbol{G_2}$. А граф $\boldsymbol{G_2}$ имеет только 3 простых цикла: 1-2-3-4-5-6-1, 1-2-4-3-6-5-1, 1-5-4-2-3-6-1.

Получаем противоречие, т.к. мы предполагали, что граф $\boldsymbol{X}$ имеет 6 простых циклов.

Следовательно равенство (2) имеет единственное объединение.

Т.к. $\boldsymbol{K_i \cap K_j = 0}$, $\boldsymbol{K_i \cap K_n = 0}$, $\boldsymbol{K_j \cap K_n = 0}$, то любые два элемента из $\boldsymbol{K_i}$, $\boldsymbol{K_j}$, K_n принадлежат классу третьего элемента.

Т.о. получаем тройку циклических шестиугольников:

$$\boldsymbol{(K_i \cup K_j)\,\Delta\,(K_i \cup K_n) = (K_j \cup K_n)}\ .$$

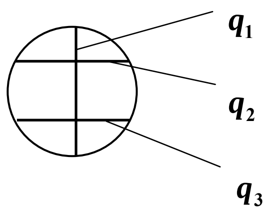
Т.к. существует 60 различных $\boldsymbol{A_k}$, то мы будем иметь 60 различных объединений $\boldsymbol{(K_i \cup K_j \cup K_n)}$, т.е. 60 различных троек циклических шестиугольников. Обозначим множество этих троек через H. Т.о. H определяет множество точек Киркмана. Тогда $\boldsymbol{T^3 \setminus H = S}$ - это множество троек циклических шестиугольников, прямые Паскаля которых пересекаются в точках Штейнера.

Теперь снова вернёмся к равенству (1).

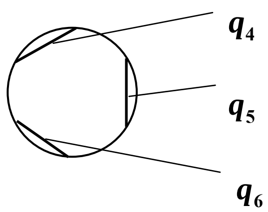
Пусть $\boldsymbol{K_i = \{q_1, q_2, q_3\}}$; $\boldsymbol{K_j = \{q_4, q_5, q_6\}}$; $\boldsymbol{K_n = \{q_7, q_8, q_9\}}$. Тогда в шестиугольнике $\boldsymbol{(K_i \cup K_j)}$ стороны $\boldsymbol{q_i \in K_i}$ и $\boldsymbol{q_j \in K_j}$ будут чередоваться. Аналогично, для $\boldsymbol{(K_i \cup K_n)}$ чередуются стороны $\boldsymbol{q_i \in K_i}$ и $\boldsymbol{q_n \in K_n}$, и для шестиугольника $\boldsymbol{(K_j \cup K_n)}$ будут чередоваться стороны $\boldsymbol{q_j \in K_j}$ и $\boldsymbol{q_n \in K_n}$.

Пример:

$\boldsymbol{K_1 = \{q_1, q_2, q_3\}}$:



$\boldsymbol{K_4 = \{q_4, q_5, q_6\}}$:



$\boldsymbol{K_2 = \{q_7, q_8, q_9\}}$:

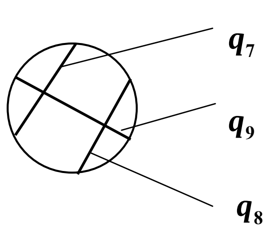


Рис.6

Теперь приступим к описанию математического аппарата, который позволит доказать в общем виде теорему о циклических шестиугольниках и найти все конкретные тройки таких шестиугольников.

4. Определения

Определение 1

Оператором цикла σ будем называть подстановку из 6-ти элементов, которая допускает разложение в произведение двух независимых циклов по три элемента в каждом.

Пример: $$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,4\,6\,1\,3\,5 \end{pmatrix} = (1\,2\,4)(3\,6\,5).$$

Определение 2

Подстановку (b_i) будем называть тождественной подстановке

$$(a_i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$$

и обозначать $(b_i) \equiv (a_i)$, если у данных подстановок одинаковая последовательность элементов a_i, представленных циклом, независимо от направления обхода, где $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $b_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Пример:

$$(a_i) = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,3\,4\,6\,2\,5 \end{pmatrix}, \qquad (b_i) = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,6\,4\,3\,1\,5 \end{pmatrix}$$

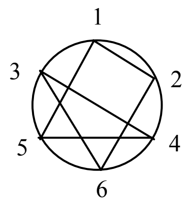
Последовательность элементов a_i: 1-3-4-6-2-5-1, последовательность элементов b_i: 2-6-4-3-1-5-2. Как видим, последовательности элементов a_i и b_i совпадают и противоположны по направлению обхода. Следовательно, по Определению 2 $(a_i) \equiv (b_i)$.

Если на конике взять 6 точек и занумеровать их произвольным образом элементами $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, то каждой подстановке (a_i) можно поставить в соответствие шестиугольник:

$$A_k = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$$

Пример:

$$(a_i) = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 3\,4\,5\,1\,2\,6 \end{pmatrix},$$



$$A_k = (3, 4, 5, 1, 2, 6)$$

Рис.7

Т.о. смысл тождественных подстановок заключается в том, что все они определяют один и тот же шестиугольник. Очевидно, что тождественных подстановок ровно 12.

Определение 3

Подстановки $(a_i)_1$, $(a_i)_2$, $(a_i)_3$ будем называть циклическими если

$$(a_i)_1 \cdot \sigma = (a_i)_2; \quad (a_i)_2 \cdot \sigma = (a_i)_3; \quad (a_i)_3 \cdot \sigma = (a_i)_1,$$

а подстановку $(a_i)_1$ - базовой подстановкой, т.к. (забегая вперёд) **именно она определяет оператор цикла σ.**

Каждая подстановка $(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1$ порождает 40 операторов цикла σ_j, где индекс $j \in \{1, 2, ..., 40\}$ определяет тип оператора.

Действительно, число сочетаний $C_6^3 = 20$. А каждый оператор цикла состоит из произведения двух независимых циклов, т.е. элементы в этих циклах не повторяются и т.к. для независимых циклов $(a_i, a_j, a_k)(a_p, a_q, a_r) = (a_p, a_q, a_r)(a_i, a_j, a_k)$, то получаем 10 различных операторов σ_j.Если изменить направление обхода в одном из независимых циклов, то получим новый оператор σ_j. Т.е. число операторов увеличилось на 10. Если направление обхода изменить во втором независимом цикле, то число различных операторов σ_j увеличится ещё на 10. И, наконец, мы можем изменить направление обхода сразу в обоих независимых циклах, увеличив тем самым число операторов σ_j ещё на 10. Т.о. всего получаем 40 различных типов операторов цикла σ_j.

Определение 4

Сопряжёнными операторами цикла будем называть такие операторы σ_j и σ_k, которые для базовых тождественных подстановок порождают тождественные циклические подстановки.

Т.е. если $(a_i)_1 \equiv (b_i)_1$ и

$$(a_i)_1 \cdot \sigma_j = (a_i)_2; \; (a_i)_2 \cdot \sigma_j = (a_i)_3; \; (a_i)_3 \cdot \sigma_j = (a_i)_1;$$

$$(b_i)_1 \cdot \sigma_k = (b_i)_2; \; (b_i)_2 \cdot \sigma_k = (b_i)_3; \; (b_i)_3 \cdot \sigma_k = (b_i)_1,$$

где $(a_i)_2 \equiv (b_i)_2$; $(a_i)_3 \equiv (b_i)_3$ или $(a_i)_2 \equiv (b_i)_3$; $(a_i)_3 \equiv (b_i)_2$, то $\sigma_j \perp \sigma_k$. Знаком «$\perp$» будем обозначать сопряжение операторов цикла.

Пример:

$$(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,3\,1\,5\,6\,2 \end{pmatrix}_1; \qquad \sigma_j = (416)(253) = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,5\,2\,1\,3\,4 \end{pmatrix};$$

$$(a_i)_1 \cdot \sigma_j = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,2\,6\,3\,4\,5 \end{pmatrix}_2; \qquad (a_i)_2 \cdot \sigma_j = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,5\,4\,2\,1\,3 \end{pmatrix}_3;$$

$$(b_i)_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,3\,4\,2\,6\,5 \end{pmatrix}_1; \qquad \sigma_k = (146)(523) = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,3\,5\,6\,2\,1 \end{pmatrix};$$

$$(b_i)_1 \cdot \sigma_k = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,5\,6\,3\,1\,2 \end{pmatrix}_2; \qquad (b_i)_2 \cdot \sigma_k = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,2\,1\,5\,4\,3 \end{pmatrix}_3;$$

$(a_i)_1 \equiv (b_i)_1$; $(a_i)_2 \equiv (b_i)_3$; $(a_i)_3 \equiv (b_i)_2$, следовательно $\sigma_j \perp \sigma_k$.

Очевидно, что тип оператора σ_j определяется порядком расположения элементов a_i в его независимых циклах.

Определение 5

Самосопряжёнными операторами цикла будем называть такие однотипные операторы, которые в случае тождественных базовых подстановок порождают тождественные циклические подстановки.

Т.е. множество самосопряжённых операторов является подмножеством сопряжённых операторов.

В предыдущем примере σ_j и σ_k как раз являются однотипными, т.к.

$$(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,3\,1\,5\,6\,2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1; \qquad \sigma_j = (416)(253) = (a_1 a_3 a_5)(a_6 a_4 a_2);$$

$$(b_i)_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,3\,4\,2\,6\,5 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}_1; \qquad \sigma_k = (146)(523) = (b_1 b_3 b_5)(b_6 b_4 b_2);$$

Индексы элементов a_i в независимых циклах оператора σ_j соответствуют индексам элементов b_i для σ_k (мы говорили, что именно базовая подстановка определяет тип оператора).

Как выяснилось, каждый из 40 операторов σ_j имеет сопряжённый оператор. Рассмотрим оставшиеся 20 типов операторов, которые определяет подстановка $(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1$.

$\sigma_1 = (a_1a_2a_3)(a_4a_5a_6)$; $\sigma_2 = (a_1a_2a_3)(a_6a_5a_4)$;
$\sigma_3 = (a_1a_3a_5)(a_2a_4a_6)$; $\sigma_4 = (a_1a_3a_5)(a_6a_4a_2)$;
$\sigma_5 = (a_1a_2a_4)(a_3a_5a_6)$; $\sigma_6 = (a_1a_2a_4)(a_6a_5a_3)$;
$\sigma_7 = (a_1a_2a_5)(a_3a_4a_6)$; $\sigma_8 = (a_1a_2a_5)(a_6a_4a_3)$;
$\sigma_9 = (a_1a_2a_6)(a_3a_4a_5)$; $\sigma_{10} = (a_1a_2a_6)(a_5a_4a_3)$;
$\sigma_{11} = (a_1a_3a_4)(a_2a_5a_6)$; $\sigma_{12} = (a_1a_3a_4)(a_6a_5a_2)$;
$\sigma_{13} = (a_1a_3a_6)(a_2a_4a_5)$; $\sigma_{14} = (a_1a_3a_6)(a_5a_4a_2)$;
$\sigma_{15} = (a_1a_4a_5)(a_2a_3a_6)$; $\sigma_{16} = (a_1a_4a_5)(a_6a_3a_2)$;
$\sigma_{17} = (a_1a_5a_6)(a_2a_3a_4)$; $\sigma_{18} = (a_1a_5a_6)(a_4a_3a_2)$;
$\sigma_{19} = (a_1a_4a_6)(a_2a_3a_5)$; $\sigma_{20} = (a_1a_4a_6)(a_5a_3a_2)$;

Оказывается, что и среди этих 20-ти операторов есть ещё сопряжённые операторы. Покажем эти операторы, но сначала дадим три необходимых определения.

Определение 6

Оператором сдвига будем называть подстановку

$$(\delta) = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,3\,4\,5\,6\,1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $(\delta)^n \cdot (a_i)_j = (b_i)_k \equiv (a_i)_j$, где $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Т.о. при помощи оператора сдвига можно получить 6 подстановок, тождественных данной.

Определение 7

Подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ будем называть тождественно-зеркальной подстановке $(a_i)_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$ и обозначать её $\overline{(a_i)_j}$.

Определение 8

Подстановку $(\omega) = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,5\,4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}$ будем называть оператором зеркального отражения.

Т.е. $(\omega) \cdot (a_i)_j = \overline{(a_i)_j}$.

Т.о., все 12 тождественных подстановок можно разбить на два класса подстановок (b_i) и (c_i), где

$$(b_i)_j = (\delta)^n \cdot (a_i)_j, \qquad n \in \{1, 2, ..., 6\};$$
$$(c_i)_j = (\omega) \cdot (b_i)_j = (\omega) \cdot (\delta)^n \cdot (a_i)_j.$$

Для тождественных подстановок справедливо

свойство:

Если даны две тождественные подстановки $(a_i) \equiv (b_i)$ и произвольная подстановка (ρ), то

$$(a_i)\cdot(\rho) \equiv (b_i)\cdot(\rho). \qquad (3)$$

Данное свойство справедливо в силу справедливости сочетательного закона умножения подстановок и закона транзитивности для тождественных подстановок.

Действительно:

пусть: $(a_i)\cdot(\rho) = (c_i)$.

$$(a_i) \equiv (b_i);\ (b_i) = (\delta)^n\cdot(\omega)^k\cdot(a_i);$$
$$(b_i)\cdot(\rho) = ((\delta)^n\cdot(\omega)^k\cdot(a_i))\cdot(\rho) = (\delta)^n\cdot(\omega)^k\cdot((a_i)\cdot(\rho)) =$$
$$= (\delta)^n\cdot(\omega)^k\cdot(c_i) \equiv (c_i);\ \text{т.е. } (b_i)\cdot(\rho) \equiv (c_i).$$

Из $(a_i)\cdot(\rho) = (c_i)$ можем записать, что $(a_i)\cdot(\rho) \equiv (c_i)$. И в силу закона транзитивности для тождественных подстановок получаем: $(a_i)\cdot(\rho) \equiv (b_i)\cdot(\rho)$.

Для операторов (δ) и (ω) справедливо

свойство коммутативности:

$$(\delta)^n\cdot(\omega) \equiv (\omega)\cdot(\delta)^k; \qquad n,k \in \{1, 2, ..., 6\} \qquad (4)$$

При $n + k = 6$ получаем следствие из свойства коммутативности:

$$(\delta)^n\cdot(\omega) = (\omega)\cdot(\delta)^k \qquad (5)$$

Равенство (5) проверяется непосредственным вычислением. Докажем свойство (4). В силу тождественности $(\delta)^n \equiv (\delta)^m$ и свойства (3) можем записать

$(\delta)^n\cdot(\omega) \equiv (\delta)^m\cdot(\omega)$. Но в силу равенства (5): $(\delta)^n\cdot(\omega) = (\omega)\cdot(\delta)^k$, при $n + k = 6$ очевидно, что $(\delta)^n\cdot(\omega) \equiv (\omega)\cdot(\delta)^k$. И по закону транзитивности свойства тождественности получаем: $(\delta)^m\cdot(\omega) \equiv (\omega)\cdot(\delta)^k$, что и требовалось доказать.

Из равенства (5) в частности получаем $(\delta)\cdot(\omega)\cdot(\delta) = (\omega)$, и т.к. $(\omega)^2 = (\varepsilon)$, то $((\delta)\cdot(\omega))^2 = ((\omega)\cdot(\delta))^2 = (\varepsilon)$, где (ε) - нейтральная подстановка, такая, что $(a)\cdot(\varepsilon) = (\varepsilon)\cdot(a) = (a)$.

Теперь вернёмся к отысканию сопряжённых операторов среди $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{20}$. Покажем, что каждый из операторов цикла типа $\sigma_7, \sigma_8, ..., \sigma_{20}$ будет обязательно сопряжён с каким-нибудь из операторов $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_6$.

Пусть $(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \mapsto \sigma_7$. Знак «$\mapsto$» здесь заменяет слова «порождает оператор цикла».

$$\sigma_7 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_5 & a_4 & a_6 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим подстановку, тождественную подстановке $(a_i)_1$.

$$(a_i)_1 \equiv \delta^2 \cdot (a_i)_1 = (b_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

Найдём для этой подстановки оператор цикла типа σ_5. Т.е. первый независимый цикл оператора σ_5 должен иметь 1, 2 и 4 элементы из нижнего ряда подстановки $(b_i)_1$, а второй соответственно – 3, 5 и 6 элементы. Получаем:

$$\sigma_5 = (a_3 a_4 a_6)(a_5 a_1 a_2) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_5 & a_4 & a_6 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} = \sigma_7.$$

Т.к. $\sigma_7 = \sigma_5$ и $(a_i)_1 \equiv (b_i)_1$, то в силу тождества (3) циклические подстановки будут соответственно тождественными: $(a_i)_j \cdot \sigma_7 \equiv (b_i)_j \cdot \sigma_5$, и, следовательно $\sigma_7 \perp \sigma_5$.

Аналогично доказывается, что $\sigma_8 \perp \sigma_6$.

Рассмотрим оператор цикла σ_9. Т.е.

$$(a_i)_1 \mapsto \sigma_9 = (a_1 a_2 a_6)(a_3 a_4 a_5) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_6 & a_4 & a_5 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим подстановку $(b_i)_1 \equiv (a_i)_1$, где $(b_i)_1 = (\delta)^5 \cdot (a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$.

Тогда $(b_i)_1 \mapsto \sigma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_6 & a_4 & a_5 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} = \sigma_9$, и, следовательно, как и в предыдущем случае, получаем, что $\sigma_9 \perp \sigma_1$.

Рассуждая аналогично, находим:

$$\sigma_1 \perp \sigma_9 \perp \sigma_{17};\ \sigma_2 \perp \sigma_{10} \perp \sigma_8;$$
$$\sigma_5 \perp \sigma_7 \perp \sigma_{11} \perp \sigma_{13} \perp \sigma_{15} \perp \sigma_{19};$$
$$\sigma_6 \perp \sigma_8 \perp \sigma_{12} \perp \sigma_{14} \perp \sigma_{16} \perp \sigma_{20}.$$

Для циклов типа σ_3 и σ_4 сопряжённых операторов не существует. Как будет показано ниже, среди операторов цикла типа $\sigma_1, ..., \sigma_6$ существуют самосопряжённые операторы.

5. Обоснование использования аппарата алгебраических подстановок

В разделе 4 мы сформулировали теорему о циклических шестиугольниках. Сейчас мы дадим необходимое обоснование использования алгебраических подстановок, чтобы в дальнейшем с его помощью можно было доказать вышеназванную теорему и провести некоторые исследования.

Итак, мы выделили 6 типов несопряжённых операторов цикла для базовой подстановки $(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$:

$$\sigma_1 = (a_1a_2a_3)(a_4a_5a_6) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_2 = (a_1a_2a_3)(a_6a_5a_4) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_3 = (a_1a_3a_5)(a_2a_4a_6) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_4 = (a_1a_3a_5)(a_6a_4a_2) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_6 & a_5 & a_2 & a_1 & a_4 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_5 = (a_1a_2a_4)(a_3a_5a_6) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_4 & a_5 & a_1 & a_6 & a_3 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_6 = (a_1a_2a_4)(a_6a_5a_3) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_4 & a_6 & a_1 & a_3 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Найдём с помощью каждого из этих операторов подстановки циклических шестиугольников.

Для σ_1 имеем:

$$(a_i)_1 \cdot \sigma_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_2; (a_i)_2 \cdot \sigma_1 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}_3.$$

Из теоремы о циклических шестиугольниках помним, что циклические шестиугольники состоят из парных объединений подмножеств K_i, K_j, K_n. Попробуем выделить такие подмножества среди полученных подстановок $(a_i)_1$, $(a_i)_2$ и $(a_i)_3$.

Введём обозначения.

Для $(a_i)_1$: $(a_1a_2) = q_1$; $(a_2a_3) = q_2$; $(a_3a_4) = q_3$;
$(a_4a_5) = q_4$; $(a_5a_6) = q_5$; $(a_6a_1) = q_6$.

Для $(a_i)_2$: $(a_2a_3) = q_2$; $(a_3a_1) = q_7$; $(a_1a_5) = q_8$;
$(a_5a_6) = q_5$; $(a_6a_4) = q_9$; $(a_4a_2) = q_{10}$.

Для $(a_i)_3$: $(a_3a_1)=q_7$; $(a_1a_2)=q_1$; $(a_2a_6)=q_{11}$;
$(a_6a_4)=q_9$; $(a_4a_5)=q_4$; $(a_5a_3)=q_{12}$.

Чтобы наши циклические шестиугольники соответствовали упомянутой теореме необходимо, чтобы объединение $K_i \cup K_j \cup K_n$ состояло только из 9-ти элементов q_i (стр. 6). При использовании оператора σ_1 мы получаем шестиугольники, состоящие из 12-ти элементов q_i. Это противоречит теореме о циклических шестиугольниках.

Построим циклические шестиугольники, используя оператор цикла σ_2. Обозначения для q_i оставим, как и в предыдущем случае.

$$(a_i)_1 \cdot \sigma_2 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}_2 ; (a_i)_2 \cdot \sigma_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_3 .$$

Для $(a_i)_2$: $(a_2a_3)=q_2$; $(a_3a_1)=q_7$; $(a_1a_6)=q_6$;
$(a_6a_4)=q_9$; $(a_4a_5)=q_4$; $(a_5a_2)=q_{13}$.
Для $(a_i)_3$: $(a_3a_1)=q_7$; $(a_1a_2)=q_1$; $(a_2a_5)=q_{13}$;
$(a_5a_6)=q_5$; $(a_6a_4)=q_9$; $(a_4a_3)=q_3$.

Т.е. получаем: $K_i=\{q_1,q_3,q_5\}$; $K_j=\{q_2,q_4,q_6\}$; $K_n=\{q_7,q_9,q_{13}\}$,
$(a_i)_1 = K_i \cup K_j$; $(a_i)_2 = K_j \cup K_n$; $(a_i)_3 = K_i \cup K_n$.

Таким образом оператор σ_2 годится для построения циклических шестиугольников.

Исследуем циклические шестиугольники, получаемые при помощи оператора σ_3.

$$(a_i)_1 \cdot \sigma_3 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}_2 ; (a_i)_2 \cdot \sigma_3 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_5 & a_6 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}_3 .$$

Как видим, $(a_i)_1$, $(a_i)_2$, $(a_i)_3$ тождественны между собой. Т.е. этот случай также как и первый не удовлетворяет условиям нашей теоремы.

Рассмотрим шестиугольники, получаемые при помощи оператора цикла σ_4.

$$(a_i)_1 \cdot \sigma_4 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_6 & a_5 & a_2 & a_1 & a_4 \end{pmatrix}_2 ; (a_i)_2 \cdot \sigma_4 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_5 & a_4 & a_1 & a_6 & a_3 & a_2 \end{pmatrix}_3 .$$

Для $(a_i)_2$: $(a_3a_6)=q_{14}$; $(a_6a_5)=q_5$; $(a_5a_2)=q_{13}$;
$(a_2a_1)=q_1$; $(a_1a_4)=q_{15}$; $(a_4a_3)=q_3$.
Для $(a_i)_3$: $(a_5a_4)=q_4$; $(a_4a_1)=q_{15}$; $(a_1a_6)=q_6$;
$(a_6a_3)=q_{14}$; $(a_3a_2)=q_2$; $(a_2a_5)=q_{13}$.

Получаем: $K_i=\{q_1,q_3,q_5\}$; $K_j=\{q_2,q_4,q_6\}$; $K_n=\{q_{13},q_{14},q_{15}\}$

$$(a_i)_1 = K_i \cup K_j ; \quad (a_i)_2 = K_i \cup K_n ; \quad (a_i)_3 = K_j \cup K_n .$$

Аналогично исследуя операторы σ_5 и σ_6 получаем 12 и 15 элементов $\boldsymbol{q_i}$ соответственно, что противоречит условиям теоремы о циклических шестиугольниках.

Отметим, что теорема о циклических шестиугольниках объединяет в себе две части, соответствующие двум классам троек циклических шестиугольников, получаемых при помощи операторов σ_2 и σ_4.

Ниже мы увидим, что при помощи оператора σ_2 вычисляются все тройки циклических подстановок, соответствующие циклическим шестиугольникам множества $\boldsymbol{H}$, а при помощи оператора σ_4 - циклическим шестиугольникам множества $\boldsymbol{S}$.

6. Доказательство теоремы о циклических шестиугольниках

Приступим к доказательству теоремы о циклических шестиугольниках.

Доказательство разобъём на две части, для оператора σ_2 и оператора σ_4.

Доказательство:

1. Пусть базовая подстановка имеет вид:

$$(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1 .$$

Для этой подстановки $\sigma_2 = (a_1 a_2 a_3)(a_6 a_5 a_4) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$.

Найдём $(a_i)_2$ и $(a_i)_3$.

$$(a_i)_2 = (a_i)_1 \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}_2$$

$$(a_i)_3 = (a_i)_2 \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_3 .$$

Определим для каждого из циклических шестиугольников прямые Паскаля. Для этого найдём точки пересечения противоположных сторон. Для шестиугольника, соответствующего подстановке $(a_i)_1$ будем иметь:

$((a_1 a_2) \cap (a_4 a_5)) \equiv A$; $((a_2 a_3) \cap (a_5 a_6)) \equiv B$; $((a_3 a_4) \cap (a_6 a_1)) \equiv C$.

Тогда по теореме Паскаля точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ лежат на одной прямой (прямая Паскаля). Обозначим эту прямую α.

Для $(a_i)_2$ будем иметь свою прямую Паскаля.

$((a_2 a_3) \cap (a_6 a_4)) \equiv M$; $((a_3 a_1) \cap (a_4 a_5)) \equiv N$; $((a_1 a_6) \cap (a_5 a_2)) \equiv K$.

Точки $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{K}$ лежат на одной прямой - β.

Для третьего шестиугольника $(a_i)_3$ будем иметь такие точки пересечения противоположных сторон:

$((a_3a_1)\cap(a_5a_6))\equiv X$; $((a_1a_2)\cap(a_6a_4))\equiv Y$; $((a_2a_5)\cap(a_4a_3))\equiv Z$.

Точки X, Y, Z лежат на одной прямой - γ.

Рассмотрим шестиугольник, вершины которого расположены на прямых (a_1a_2) и (a_5a_6):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ A & B & a_2 & X & Y & a_6 \end{pmatrix}.$$

Найдём точки пересечения его противоположных сторон, определяющие прямую Паскаля – Паппа для данного шестиугольника.

$((AB)\cap(XY))\equiv O$; $((Ba_2)\cap(Ya_6))\equiv R$; $((a_2X)\cap(a_6A))\equiv P$.

Но $(AB)\equiv\alpha$, $(XY)\equiv\gamma$ следовательно можно записать $\alpha\cap\gamma\equiv O$. Таким образом, нам необходимо доказать, что также и прямая β проходит через точку O.

Точка $B\in(a_2a_3)$, точка $M\in(a_2a_3)$, следовательно можно записать: $M\in(Ba_2)$.

Точка $Y\in(a_6a_4)$, точка $M\in(a_6a_4)$, следовательно можно записать: $M\in(Ya_6)$.

Т.к. $M\in(Ba_2)$ и $M\in(Ya_6)$ заключаем, что $M\equiv R$.

Рассмотрим ещё один шестиугольник, вершины которого также расположены на прямых (a_1a_2) и (a_5a_6):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & X & a_1 & a_6 & A & a_5 \end{pmatrix}.$$

Определим для него прямую Паскаля – Паппа.

$((a_2X)\cap(a_6A))\equiv P$; $((Xa_1)\cap(Aa_5))\equiv Q$; $((a_1a_6)\cap(a_5a_2))\equiv K$.

Точка $X\in(a_1a_3)$, точка $N\in(a_1a_3)$, следовательно можно записать: $N\in(Xa_1)$.

Точка $A\in(a_4a_5)$, точка $N\in(a_4a_5)$, следовательно можно записать: $N\in(Aa_5)$.

Т.к. $N\in(Xa_1)$ и $N\in(Aa_5)$ заключаем, что $N\equiv Q$. Но т.к. $(KN)\equiv\beta$, то и $P\in\beta$. А т.к. точки O, M, P лежат на одной прямой и $M\in\beta$, $P\in\beta$, то и $O\in\beta$. Т.е. прямые Паскаля α, β, γ пересекаются в одной точке O.

Что и требовалось доказать.

2. Аналогично проводится и доказательство для оператора цикла σ_4.

$$\sigma_4=(a_1a_3a_5)(a_6a_4a_2)=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_6 & a_5 & a_2 & a_1 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Имеем циклические шестиугольники, вернее – подстановки их определяющие $(a_i)_1$, $(a_i)_2$, $(a_i)_3$, а именно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_6 & a_5 & a_2 & a_1 & a_4 \end{pmatrix}_2, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_5 & a_4 & a_1 & a_6 & a_3 & a_2 \end{pmatrix}_3.$$

Для этих шестиугольников прямые Паскаля α, β, γ соответственно будут определяться:

$$\alpha : \{ ((a_1a_2) \cap (a_4a_5)) \equiv A; ((a_2a_3) \cap (a_5a_6)) \equiv B; ((a_3a_4) \cap (a_6a_1)) \equiv C \};$$

$$\beta : \{ ((a_3a_6) \cap (a_2a_1)) \equiv M; ((a_6a_5) \cap (a_1a_4)) \equiv N; ((a_5a_2) \cap (a_4a_3)) \equiv K \};$$

$$\gamma : \{ ((a_5a_4) \cap (a_6a_3)) \equiv X; ((a_4a_1) \cap (a_3a_2)) \equiv Y; ((a_1a_6) \cap (a_2a_5)) \equiv Z \}.$$

Рассмотрим шестиугольник, вершины которого расположены на прямых (a_2a_3) и (a_1a_6):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ B & C & a_3 & Y & Z & a_2 \end{pmatrix}.$$

Определим прямую Паскаля – Паппа для этого шестиугольника:

$$((BC) \cap (YZ)) \equiv O; \qquad ((Ca_3) \cap (Za_2)) \equiv R; \qquad ((a_3Y) \cap (a_2B)) \equiv P.$$

$(BC) \equiv \alpha$, $(YZ) \equiv \gamma$ следовательно $\alpha \cap \gamma \equiv O$.

Точка $C \in (a_3a_4)$, точка $K \in (a_3a_4)$ следовательно $K \in (Ca_3)$. Точка $Z \in (a_2a_5)$, точка $K \in (a_2a_5)$ следовательно $K \in (a_2Z)$ и следовательно $K \equiv R$.

Рассмотрим ещё один шестиугольник на прямых (a_2a_3) и (a_1a_6):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & Y & a_1 & a_2 & B & a_6 \end{pmatrix}.$$

Его прямая Паскаля определяется точками: P, Q, M.

$$((a_3Y) \cap (a_2B)) \equiv P; \qquad ((Ya_1) \cap (Ba_6)) \equiv Q; \qquad ((a_1a_2) \cap (a_6a_3)) \equiv M.$$

Точка $Y \in (a_1a_4)$, точка $N \in (a_1a_4)$ следовательно $N \in (Ya_1)$. Точка $B \in (a_5a_6)$, точка $N \in (a_5a_6)$ следовательно $N \in (Ba_6)$ и следовательно $N \equiv Q$. Следовательно точки M, N, P принадлежат прямой β, но т.к. $K \in \beta$ и $P \in \beta$, то и точка $O \in \beta$. Следовательно прямые Паскаля α, β, γ пересекаются в одной точке O.

Что и требовалось доказать.

Для второй части теоремы существует ещё одно очень оригинальное и более «прозрачное» доказательство. Покажем его здесь.

2*. Рассмотрим такой шестиугольник $(a_i)_1^*$:

$$(a_i)_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_6 & a_5 & a_4 \end{pmatrix}_1 .$$

Найдём для него прямую Паскаля:

$$((a_1a_2) \cap (a_6a_5)) \equiv U; \quad ((a_2a_3) \cap (a_5a_4)) \equiv V; \quad ((a_3a_6) \cap (a_4a_1)) \equiv W .$$

Рассмотрим два треугольника, образованные прямыми (a_1a_2), (a_3a_6), (a_4a_5) и прямыми (a_5a_6), (a_1a_4), (a_2a_3).

Используя уже принятые выше обозначения – это будут треугольники: ΔAMX и ΔBNY. И т.к.

$$((a_1a_2) \cap (a_4a_5)) \equiv A; \quad ((a_3a_6) \cap (a_1a_2)) \equiv M; \quad ((a_4a_5) \cap (a_3a_6)) \equiv X;$$

$$((a_2a_3) \cap (a_5a_6)) \equiv B; \quad ((a_5a_6) \cap (a_1a_4)) \equiv N; \quad ((a_1a_4) \cap (a_2a_3)) \equiv Y,$$

можем записать: $((AM) \cap (BN)) \equiv U$; $((AX) \cap (BY)) \equiv V$; $((MX) \cap (NY)) \equiv W$.

Из этого заключаем, что стороны треугольников ΔAMX и ΔBNY, попарно пересекаясь, образуют точки U, V, W, лежащие на одной прямой (ось перспективы), а следовательно, по теореме Дезарга эти треугольники должны иметь центр перспективы. Т.е. прямые, проходящие через соответствующие в треугольниках вершины, будут пересекаться в одной точке. В нашем случае имеем соответствие: $A \leftrightarrow B$, $M \leftrightarrow N$, $X \leftrightarrow Y$, т.е. прямые (AB), (MN) и (XY) пересекаются в одной точке. А это ни что иное, как прямые Паскаля циклических шестиугольников, определяемых подстановками: $(a_i)_1$, $(a_i)_2$, $(a_i)_3$.

Что и требовалось доказать.

Данное доказательство ценно тем, что оно позволяет отыскать парные тройки $(a_i)_j$ и $(a_i)_j^*$ циклических шестиугольников на множестве S.

Взяв подстановку $(a_i)_1^*$ за базовую, найдём для неё оператор цикла σ_4:

$$\sigma_4 = (a_1a_3a_5)(a_2a_4a_6) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $(a_i)_2^* = (a_i)_1^* \cdot \sigma_4$.

$$(a_i)_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_4 & a_3 & a_6 & a_1 & a_2 & a_5 \end{pmatrix}_2^* .$$

И теперь, отталкиваясь от подстановки $(a_i)_2^*$, можем вновь построить аналогичное доказательство второй части теоремы о циклических шестиугольниках.

Подобное же доказательство можно провести и с подстановкой $(a_i)_3^* = (a_i)_2^* \cdot \sigma_4$.

Т.о., множество S распадается на 10 пар троек циклических шестиугольников.

Вышедоказанная теорема даёт аналитический метод исследования (может быть, и не самый удобный), который всё-таки позволяет заменить прямые геометрические построения, во время которых очень трудно избежать погрешностей и, как правило, частных случаев.

7. Аналитическое исследование множества T^3.

Рассмотрим каждую из циклических подстановок как базовую. Как выяснилось, циклические подстановки порождают один и тот же оператор цикла.

Действительно:

Пусть $(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1$, тогда $(a_i)_1 \mapsto \sigma_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$.

Найдём $(a_i)_2 = (a_i)_1 \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}_2$. Для данной подстановки, как для базовой построим оператор цикла типа σ_2.

$$(a_i)_2 \mapsto \sigma_2' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Проделав аналогичные операции для подстановки $(a_i)_3$, не трудно убедиться, что порождаемый ею оператор цикла типа σ_2 равен предыдущему.

Это свойство справедливо и для оператора цикла типа σ_4.

Рассмотрим две тройки циклических подстановок: $(a_i)_1$, $(a_i)_2$, $(a_i)_3$ с оператором цикла σ_a и $(b_i)_1$, $(b_i)_2$, $(b_i)_3$ с оператором цикла σ_b, где σ_a и σ_b операторы цикла типа σ_2 либо - типа σ_4.

Рассмотрим такой случай. Пусть две какие-нибудь подстановки, по одной из каждой тройки, не тождественны между собой, например подстановки $(a_i)_1$ и $(b_i)_1$, а остальные четыре – попарно тождественны, напрмер $(a_i)_2 \equiv (b_i)_2$ и $(a_i)_3 \equiv (b_i)_3$.

Тогда: $(b_i)_2 = (\omega)^k \cdot (\delta)^p \cdot (a_i)_2$; $(b_i)_3 = (\omega)^m \cdot (\delta)^q \cdot (a_i)_3$, где $k,m \in \{1,2\}$, $p,q \in \{1,2,...,6\}$.

Для k и m возможны четыре случая:

1. $k = m = 2$;

2. $k = m = 1$;

3. $k = 2, m = 1$;

4. $\boldsymbol{k=1, m=2}$.

Рассмотрим случай 1.

$$(\delta)^p \cdot (a_i)_2 \cdot \sigma_b = (\delta)^q \cdot (a_i)_3;$$
$$(a_i)_2^{-1} \cdot (\delta)^{6-p} \cdot (\delta)^p \cdot (a_i)_2 \cdot \sigma_b = (a_i)_2^{-1} \cdot (\delta)^{6-p} \cdot (\delta)^q \cdot (a_i)_3;$$

$$\sigma_b = (a_i)_2^{-1} \cdot (\delta)^{\nu} \cdot (a_i)_3, \qquad (6)$$

где $\nu \equiv (6-p+q) \, mod \, 6$, и $1 \le \nu \le 6$.

2. $$(\omega) \cdot (\delta)^p \cdot (a_i)_2 \cdot \sigma_b = (\omega) \cdot (\delta)^q \cdot (a_i)_3.$$

Если умножим обе части последнего равенства слева на (ω), то снова придём к выражению (6).

3. $$(\delta)^p \cdot (a_i)_2 \cdot \sigma_b = (\omega) \cdot (\delta)^q \cdot (a_i)_3;$$
$$\sigma_b = (a_i)_2^{-1} \cdot (\delta)^{6-p} \cdot (\omega) \cdot (\delta)^q \cdot (a_i)_3;$$

$$\sigma_b = (a_i)_2^{-1} \cdot (\omega) \cdot (\delta)^p \cdot (\delta)^q \cdot (a_i)_3;$$

$$\sigma_b = (a_i)_2^{-1} \cdot (\omega) \cdot (\delta)^{\nu} \cdot (a_i)_3, \qquad (7)$$

где $\nu \equiv (p+q) \, mod \, 6$, и $1 \le \nu \le 6$.

4. $$(\omega) \cdot (\delta)^p \cdot (a_i)_2 \cdot \sigma_b = (\delta)^q \cdot (a_i)_3.$$

Очевидно, что последнее выражение легко можно свести к равенству (7).

Зная $(a_i)_1$, можно найти σ_a, $(a_i)_2$, $(a_i)_3$, $(a_i)_2^{-1}$ и исследовать (6) и (7) при различных $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, и различных типах оператора σ_a (помним, что σ_a может быть либо типа $\cdot\sigma_2$, либо типа σ_4).

Среди всех решений уравнений (6), (7) нас будут интересовать случаи, когда σ_b (это и есть неизвестное наших уравнений) будет типа $\cdot\sigma_2$, либо типа σ_4. В этом случае прямые Паскаля шестиугольников, соответствующих подстановкам $(a_i)_1$, $(a_i)_2$, $(a_i)_3$ и $(b_i)_1$ будут пересекаться в одной точке, т.к. подстановки $(a_i)_1$ и $(b_i)_1$ нетождественны по условию.

Рассмотрим уравнение (6).

Пусть

$$(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1, \text{ и } \sigma_a \text{ имеет тип } \sigma_2, \text{ т.е.}$$

$$\sigma_a = \sigma_2 = (a_1 a_2 a_3)(a_6 a_5 a_4) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим циклические подстановки $(a_i)_2$ и $(a_i)_3$, а также подстановку $(a_i)_2^{-1}$.

$$(a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}_2 ; \ (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_3 ; \ (a_i)_2^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}_2^{-1}$$

Будем рассматривать уравнение (6) при различных значениях ν:

$\nu = 1$.

$$\sigma_b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}_2^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_3 ,$$

$$\sigma_b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_5 & a_1 & a_2 & a_4 & a_3 & a_6 \end{pmatrix} = (a_1 a_5 a_3 a_2)(a_4)(a_6).$$

$\nu = 2$.

$$\sigma_b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_6 & a_2 & a_5 & a_3 & a_1 & a_4 \end{pmatrix} = (a_1 a_6 a_4 a_3 a_5)(a_2).$$

$\nu = 3$.

$$\sigma_b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = (a_1 a_4)(a_2 a_5)(a_3 a_6).$$

$\nu = 4$.

$$\sigma_b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_6 & a_4 & a_2 & a_5 & a_1 \end{pmatrix} = (a_1 a_3 a_4 a_2 a_6)(a_5).$$

$\nu = 5$.

$$\sigma_b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1 & a_4 & a_3 & a_5 & a_6 & a_2 \end{pmatrix} = (a_1)(a_2 a_4 a_5 a_6)(a_3).$$

$\nu = 6$.

$$\sigma_b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} = (a_1 a_2 a_3)(a_6 a_5 a_4).$$

Как видим, при $\nu = 6$ мы получили оператор цикла $\sigma_b = \sigma_a$, но мы не знаем какой вид имеет базовая подстановка $(b_i)_1$, поэтому пока ничего нельзя сказать какой тип имеет оператор σ_b.

Рассмотрим уравнение $(b_i)_3 = (\omega)^m \cdot (\delta)^q \cdot (a_i)_3$.

$m = 2$, следовательно $(\omega)^2 = (\varepsilon)$, $(a_i)_3$ - нам известно. Необходимо найти q.

При $\nu = 6$ и $p \le 6$, $q \le 6$ можем заключить, что выражение $\nu \equiv (6 - p + q) mod\ 6$ справедливо при $p = q$ (т.е. нам подходит любое значение q от 1 до 6).

Найдём $(b_i)_3$ при $q = 1$.

$$(b_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}_3 .$$

Зная $(b_i)_3$, находим $(b_i)_1 = (b_i)_3 \cdot \sigma_b$.

$$(b_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}_3 \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_1 \end{pmatrix}_1 ,$$

т.е. $(b_i)_1 \equiv (a_i)_1$, но это противоречит нашим условиям.

Не трудно убедиться, что и при остальных значениях q мы будем всегда получать $(b_i)_1 \equiv (a_i)_1$.

Как видим, ни при каких значениях ν подстановка σ_b не является нужным нам оператором цикла.

Аналогичное заключение получим и при решении уравнения (7).

Для оператора цикла σ_a типа σ_4 получаем такие же результаты.

Таким образом, мы можем сделать вывод, что в рамках доказанной теоремы о циклических шестиугольниках не удаётся найти хотя бы одну четвёрку шестиугольников, прямые Паскаля которых пересекались бы в одной точке. Вообще, такие четвёрки шестиугольников существуют. Мы покажем это в Приложении 3.

Продолжим исследование нашего множества T^3.

Построим цепочку конкретных троек шестиугольников из подмножества H по следующему алгоритму.

1. Возьмём конкретный $A_k \in A$

2. Найдём для него объединение $K_i \cup K_j \cup K_n = K \setminus A_k$

3. Определим тройку циклических шестиугольников
$A_p = (K_i \cup K_j)$; $A_q = (K_i \cup K_n)$; $A_r = (K_j \cup K_n)$.

4. Выберем шестиугольник A_m из числа найденных, но ещё не использованных для нахождения объединения $K_i \cup K_j \cup K_n = K \setminus A_k$.

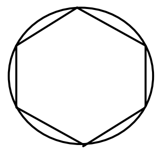
5. Переход к пункту 2

Т.к. множество $\boldsymbol{H}$ конечно, то следуя этому алгоритму, мы построим конечную цепочку объединений и, следовательно, конечную цепочку троек циклических шестиугольников.

Начнём с шестиугольника $\boldsymbol{A}_1$.

$$\boldsymbol{K} \setminus \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2 \cup \boldsymbol{K}_3 ;$$

$\boldsymbol{A}_1$:



$$(\boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2) = \boldsymbol{A}_{57} ; \quad (\boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_3) = \boldsymbol{A}_{58} ; \quad (\boldsymbol{K}_2 \cup \boldsymbol{K}_3) = \boldsymbol{A}_{56} .$$

Рис. 8

т.е. объединение для $\boldsymbol{A}_1$ порождает тройку циклических шестиугольников $(\boldsymbol{A}_{56}, \boldsymbol{A}_{57}, \boldsymbol{A}_{58})$. И так далее...

Выпишем полученную цепочку троек циклических шестиугольников:

$$\begin{array}{lll}
\boldsymbol{A}_1 & \rightarrow & (\boldsymbol{A}_{56}, \boldsymbol{A}_{57}, \boldsymbol{A}_{58}); \\
\boldsymbol{A}_{56} & \rightarrow & (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_{22}, \boldsymbol{A}_{25}); \\
\boldsymbol{A}_{57} & \rightarrow & (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_{20}, \boldsymbol{A}_{23}); \\
\boldsymbol{A}_{58} & \rightarrow & (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_{21}, \boldsymbol{A}_{24}); \\
\boldsymbol{A}_{22} & \rightarrow & (\boldsymbol{A}_{56}, \boldsymbol{A}_{23}, \boldsymbol{A}_{21}); \\
\boldsymbol{A}_{25} & \rightarrow & (\boldsymbol{A}_{56}, \boldsymbol{A}_{20}, \boldsymbol{A}_{24}); \\
\boldsymbol{A}_{20} & \rightarrow & (\boldsymbol{A}_{57}, \boldsymbol{A}_{25}, \boldsymbol{A}_{21}); \\
\boldsymbol{A}_{23} & \rightarrow & (\boldsymbol{A}_{57}, \boldsymbol{A}_{22}, \boldsymbol{A}_{24}); \\
\boldsymbol{A}_{21} & \rightarrow & (\boldsymbol{A}_{58}, \boldsymbol{A}_{20}, \boldsymbol{A}_{22}); \\
\boldsymbol{A}_{24} & \rightarrow & (\boldsymbol{A}_{58}, \boldsymbol{A}_{23}, \boldsymbol{A}_{25}).
\end{array}$$

Как видим, наша цепочка состоит из 10-ти троек, порождаемых 10-тью шестиугольниками.

Теперь построим такую цепь в самом общем виде.

Предварительно рассмотрим случаи самосопряжений операторов цикла типа σ_2, порождаемых 12-тью тождественными подстановками.

Покажем, что подстановки $(\boldsymbol{a}_i)_1$ и $\overline{(\boldsymbol{a}_i)_1}$ порождают самосопряжённые операторы цикла типа $\boldsymbol{\sigma}_2$.

Действительно:

$$(\boldsymbol{a}_i)_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_6 \end{pmatrix}_1 \mapsto \sigma_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_6 \\ \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_6 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{pmatrix};$$

$$\overline{(a_i)}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}_1 \mapsto \sigma_2{}' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}.$$

$\sigma_2{}' = \sigma_2$.

Т.к. $\sigma_2{}' = \sigma_2$ и базовые подстановки тождественны, то $(a_i)_j \cdot \sigma_2 \equiv \overline{(a_i)_j} \cdot \sigma_2{}'$ и, следовательно, σ_2 и $\sigma_2{}'$ являются самосопряжёнными операторами цикла.

Рассмотрим тождественные подстановки $(\delta)^n \cdot (a_i)_1$ и $(\delta)^{n+3} \cdot (a_i)_1$ при $n \in \{0,1,2\}$.

Пусть

$$((\delta)^n \cdot (a_i)_1)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1 \mapsto \sigma_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}.$$

$$((\delta)^{n+3} \cdot (a_i)_1) = (\delta)^3((\delta)^n \cdot (a_i)_1)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}_1 \mapsto \sigma_2{}' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}.$$

$$((\delta)^n \cdot (a_i)_1)_1 \cdot \sigma_2 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}_2 ;$$

$$(a_i)_2 \cdot \sigma_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_3 .$$

$$((\delta)^{n+3} \cdot (a_i)_1)_1 \cdot \sigma_2{}' = (a_i)_2{}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_5 & a_6 & a_4 & a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}_2' ;$$

$$(a_i)_2{}' \cdot \sigma_2{}' = (a_i)_3{}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_4 & a_5 & a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}_3' .$$

Как видим, $(a_i)_2 \equiv (a_i)_3{}'$, $(a_i)_3 \equiv (a_i)_2{}'$ следовательно операторы σ_2 и $\sigma_2{}'$ являются самосопряжёнными.

Следовательно, среди всех 12-ти тождественных подстановок не самосопряжённые операторы цикла типа σ_2 порождаются только базовыми подстановками:

$$(a_i)_1; \qquad ((\delta) \cdot (a_i)_1)_1; \qquad ((\delta)^2 \cdot (a_i)_1)_1 .$$

Это значит, что для каждого шестиугольника может быть построено три различных тройки циклических шестиугольников при помощи оператора цикла типа σ_2. Это также даёт нам возможность построения цепочки троек циклических шестиугольников, т.к. вышеописанный алгоритм неприменим для абстрактных построений.

Теперь рассмотрим самосопряжения среди операторов цикла типа σ_4, порождаемых тождественными подстановками.

Рассмотрим подстановки $(a_i)_1$ и $\omega \cdot (a_i)_1$.

Пусть

$$(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1 \mapsto \sigma_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_6 & a_5 & a_2 & a_1 & a_4 \end{pmatrix};$$

$$\omega \cdot (a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}_1 \mapsto \sigma_4' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_6 & a_5 & a_2 & a_1 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Т.е. операторы цикла σ_4 и σ_4' являются самосопряжёнными. Кроме этого заметим, что подстановка оператора цикла типа σ_4 для всех тождественных подстановок $((\delta)^n \cdot (a_i)_1)$ одна и та же. Проверить это не трудно. А это значит, что все тождественные подстановки $((\delta)^n \cdot (a_i)_1)$ порождают самосопряжённые операторы цикла типа σ_4.

Вывод: для всех 12-ти тождественных подстановок, взятых в качестве базовых, операторы цикла типа σ_4 самосопряжены.

Из всего вышеизложенного заключаем, что цепь из троек циклических подстановок возможно построить, используя только оператор цикла типа σ_2.

Приступая к конкретным вычислениям, сделаем одно важное замечание, которое позволит облегчить работу с подстановками.

Ранее везде речь шла о правом операторе цикла (имеется в виду умножение на оператор цикла справа), который порождается базовой подстановкой. Между тем, существуют, и для вычислений более удобно использовать, левые операторы цикла типа τ_2 и τ_4.

Дело в том, что левые операторы являются универсальными и не зависят от конкретной базовой подстановки.

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (123)(654);$$

$$\tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (135)(642).$$

Можно было бы с самого начала изложения нашей работы использовать только левые операторы цикла, но в этом случае многие общие понятия и свойства остались бы вне рассмотрения.

Теперь приступим к вычислению цепочки циклических подстановок. Обозначим шестиугольник, соответствующий подстановке $(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1$ через H_1, тогда

1. $H_2 :\ \tau_2 \cdot (a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}_2;$

$$H_3: \quad \tau_2 \cdot (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_3 .$$

Получаем первую тройку циклических шестиугольников: (H_1, H_2, H_3).

2. Теперь в качестве базовой (исходной) возьмём подстановку $((\delta)\cdot(a_i)_1)_1$.

$$H_4: \quad \tau_2 \cdot ((\delta)\cdot(a_i)_1)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_2 ;$$

$$H_5: \quad \tau_2 \cdot (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_4 & a_2 & a_3 & a_6 & a_1 & a_5 \end{pmatrix}_3 .$$

Получаем тройку циклических шестиугольников: (H_1, H_4, H_5).

3. И ещё раз в качестве исходной возьмём подстановку, соответствующую шестиугольнику H_1: $((\delta)^2\cdot(a_i)_1)_1$.

$$H_6: \quad \tau_2 \cdot ((\delta)^2\cdot(a_i)_1)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_4 & a_5 & a_3 & a_2 & a_6 & a_1 \end{pmatrix}_2 ;$$

$$H_7: \quad \tau_2 \cdot (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_5 & a_3 & a_4 & a_1 & a_2 & a_6 \end{pmatrix}_3 .$$

Имеем такую новую троёку: (H_1, H_6, H_7).

4. Теперь в качестве исходной возьмём подстановку шестиугольника $H_2: \quad (a_i)_1 = \left((\delta)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}\right)_1$. Мы не стали рассматривать в качестве исходной подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$, т.к. в этом случае получили бы уже известную тройку шестиугольников, как в пункте 1.

$$\tau_2 \cdot (a_i)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_6 & a_3 & a_2 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}_2 .$$

Этой подстановке соответствует шестиугольник H_5.

$\tau_2 \cdot (a_i)_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_3 & a_1 & a_5 & a_2 & a_4 \end{pmatrix}_3$ - это новая подстановка. Обозначим соответствующий ей шестиугольник H_8. Получаем такую тройку: (H_2, H_5, H_8).

5. Теперь за исходную возьмём подстановку $(a_i)_1 = \left((\delta)^2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}\right)_1$.

$$H_9 : \quad \tau_2 \cdot (a_i)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_4 & a_1 & a_3 & a_5 & a_2 \end{pmatrix}_2 ;$$

$$H_6 : \quad \tau_2 \cdot (a_i)_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_4 & a_1 & a_6 & a_2 & a_3 & a_5 \end{pmatrix}_3 .$$

Получаем тройку шестиугольников: (H_2, H_9, H_6).

6. Теперь рассмотрим подстановки шестиугольника H_3.

$$H_3 : \ (a_i)_1 = \left((\delta) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix} \right)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}_1 ;$$

$$H_8 : \ \tau_2 \cdot (a_i)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_5 & a_1 & a_3 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_2 ;$$

$$H_4 : \ \tau_2 \cdot (a_i)_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_5 & a_1 & a_2 & a_4 & a_3 & a_6 \end{pmatrix}_3 ;$$

(H_3, H_8, H_4).

7. $$H_3 : (a_i)_1 = \left((\delta)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix} \right)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_5 & a_6 & a_4 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}_1 ;$$

$$H_7 : \ \tau_2 \cdot (a_i)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_5 & a_6 & a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}_2 ;$$

$$H_9 : \ \tau_2 \cdot (a_i)_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_2 & a_5 & a_3 & a_1 & a_4 \end{pmatrix}_3 ;$$

(H_3, H_7, H_9).

8. Для шестиугольника H_4 будем иметь:

$$H_4 : (a_i)_1 = \left((\delta) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_4 & a_2 & a_1 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \right)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_4 & a_2 & a_1 & a_5 & a_6 & a_3 \end{pmatrix}_1 ;$$

$$H_7 : \ \tau_2 \cdot (a_i)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_2 ;$$

$$H_{10} : \ \tau_2 \cdot (a_i)_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_4 & a_2 & a_6 & a_3 & a_5 \end{pmatrix}_3 ;$$

(H_4, H_7, H_{10}).

Подстановка $(a_i)_1 = \left((\delta)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_4 & a_2 & a_1 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \right)_1$ шестиугольника H_4 новую тройку циклических шестиугольников не порождает, т.к. данная подстановка совпадает с подстановкой $(\omega)\cdot(\delta)^3\cdot(a_i)_3$ шестиугольника H_3.

9. Для шестиугольника H_5 будем иметь:

$$H_5 : (a_i)_1 = \left((\delta) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_4 & a_2 & a_3 & a_6 & a_1 & a_5 \end{pmatrix} \right)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_6 & a_1 & a_5 & a_4 \end{pmatrix}_1 ;$$

$$H_{10} : \tau_2 \cdot (a_i)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_6 & a_2 & a_4 & a_1 & a_5 \end{pmatrix}_2 ;$$

$$H_6 : \tau_2 \cdot (a_i)_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_2 & a_3 & a_5 & a_4 & a_1 \end{pmatrix}_3 ;$$

$$(H_5, H_{10}, H_6).$$

Как выяснилось, подстановка $\left((\delta)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_4 & a_2 & a_3 & a_6 & a_1 & a_5 \end{pmatrix} \right)_1$ шестиугольника H_5 новую тройку шестиугольников не порождает. А также и подстановки шестиугольников H_6, H_7, H_9 и H_{10}.

10. Последняя тройка циклических шестиугольников в построеной цепочке.

$$H_8 : (a_i)_1 = \left((\delta) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_3 & a_1 & a_5 & a_2 & a_4 \end{pmatrix} \right)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_5 & a_2 & a_4 & a_6 \end{pmatrix}_1 ;$$

$$H_{10} : \tau_2 \cdot (a_i)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_5 & a_3 & a_6 & a_2 & a_4 \end{pmatrix}_2 ;$$

$$H_9 : \tau_2 \cdot (a_i)_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_5 & a_3 & a_1 & a_4 & a_6 & a_2 \end{pmatrix}_3 ;$$

$$(H_8, H_{10}, H_9).$$

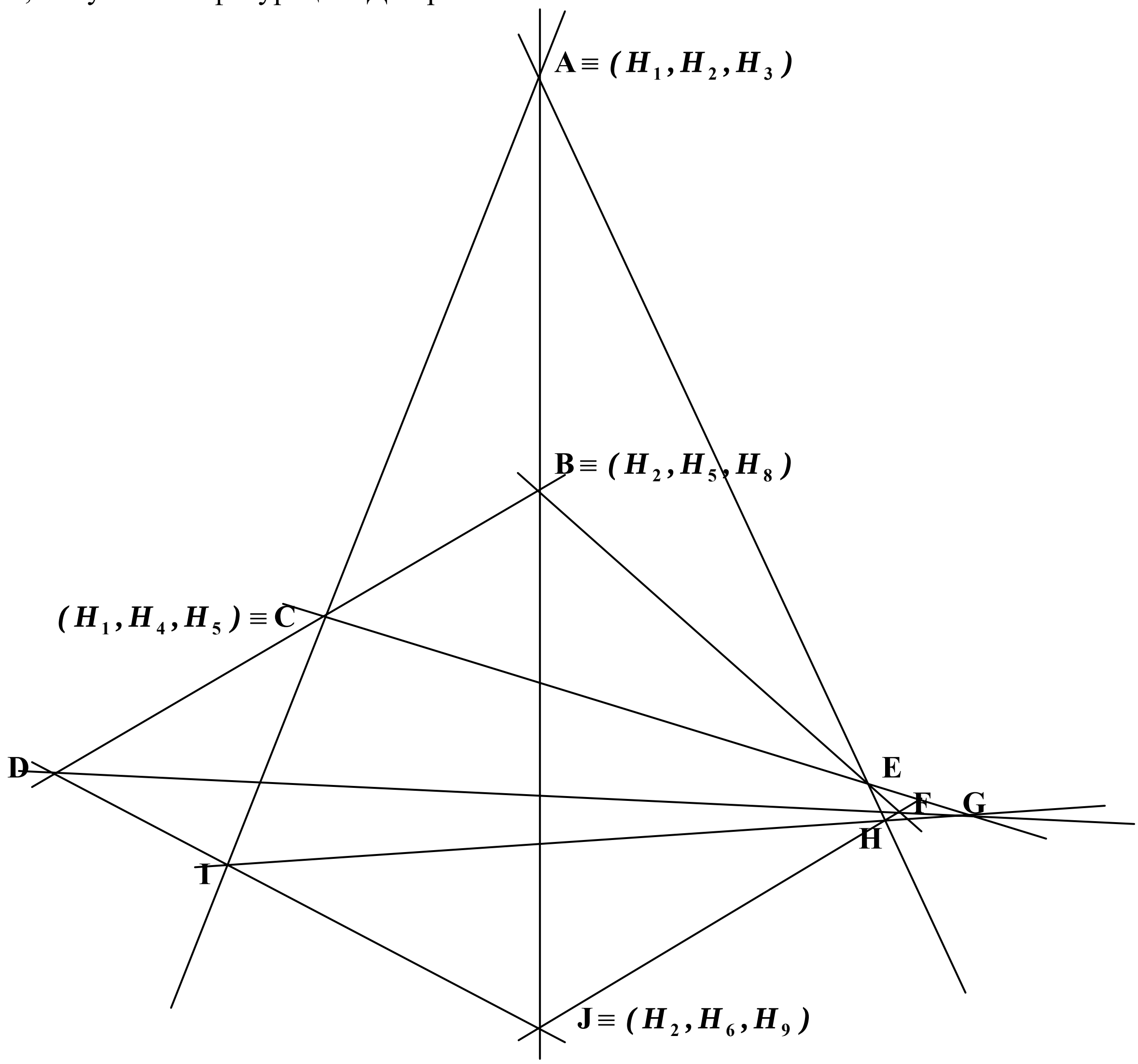
Т.о. получили цепь из 10-ти троек циклических шестиугольников, составленную из 10 шестиугольников, причём каждый из них встречается ровно 3 раза.

(H_1, H_2, H_3); (H_1, H_4, H_5); (H_1, H_6, H_7); (H_2, H_5, H_8); (H_2, H_9, H_6);
(H_3, H_8, H_4); (H_3, H_7, H_9); (H_4, H_7, H_{10}); (H_5, H_{10}, H_6); (H_8, H_{10}, H_9).

Т.к множество A состоит из 60-ти шестиугольников, а мы использовали в построении только 10, то всего можно построить 6 подобных конкретных цепочек, и, следовательно, - 60 троек циклических шестиугольников. А это значит, что при помощи оператора цикла типа σ_2 (или τ_2) можно находить циклические шестиугольники, относящиеся к подмножеству $\boldsymbol{H}$.

При внимательном рассмотрении можно заметить, что наша цепочка троек является конфигурацией Дезарга.

Действительно, сопоставим каждому шестиугольнику $\boldsymbol{H_i}$ его прямую Паскаля, а каждой тройке шестиугольников $(\boldsymbol{H_m}, \boldsymbol{H_n}, \boldsymbol{H_k})$, - точку пересечения их прямых Паскаля, получим конфигурацию Дезарга.



D ≡ (H_5, H_6, H_{10}); **E** ≡ (H_3, H_8, H_4); **F** ≡ (H_8, H_9, H_{10}); **G** ≡ (H_4, H_7, H_{10});
H ≡ (H_3, H_7, H_9); **I** ≡ (H_1, H_6, H_7)

Рис. 9

Каждая прямая на рис 9 - это прямая Паскаля шестиугольника, который является общим для троек, образующих точки данной прямой. Например, прямая (**DFG**) – является прямой Паскаля шестиугольника $\boldsymbol{H_{10}}$.

Покажем все конкретные тройки шестиугольников подмножества H с учётом обозначений принятых на множестве A (Приложение 2). Шестиугольники объединены в группы соответствующих конфигураций Дезарга.

$(A_1, A_{25}, A_{22});\ (A_{25}, A_{23}, A_{58});\ (A_{22}, A_{57}, A_{24});\ (A_{23}, A_{21}, A_{56});\ (A_{58}, A_{22}, A_{20});$
$(A_{57}, A_{21}, A_{25});\ (A_{24}, A_{56}, A_{20});\ (A_{21}, A_1, A_{24});\ (A_{56}, A_{57}, A_{58});\ (A_{20}, A_{23}, A_1);$

$(A_2, A_{55}, A_{59});\ (A_{55}, A_{38}, A_{51});\ (A_{59}, A_{53}, A_6);\ (A_{38}, A_{40}, A_{42});\ (A_{51}, A_{59}, A_4);$
$(A_{53}, A_{42}, A_{55});\ (A_6, A_{40}, A_4);\ (A_{42}, A_6, A_2);\ (A_{40}, A_{53}, A_{51});\ (A_4, A_2, A_{38});$

$(A_3, A_5, A_{39});\ (A_5, A_{60}, A_{52});\ (A_{39}, A_{43}, A_{41});\ (A_{60}, A_7, A_{54});\ (A_{50}, A_{52}, A_{39});$
$(A_{43}, A_{50}, A_{54});\ (A_{41}, A_5, A_7);\ (A_7, A_3, A_{43});\ (A_{54}, A_{52}, A_{41});\ (A_{50}, A_3, A_{60});$

$(A_{13}, A_{10}, A_{35});\ (A_{10}, A_{26}, A_{15});\ (A_{35}, A_{48}, A_{45});\ (A_{26}, A_{31}, A_{33});\ (A_{15}, A_{35}, A_{18});$
$(A_{48}, A_{18}, A_{33});\ (A_{45}, A_{31}, A_{10});\ (A_{31}, A_{13}, A_{48});\ (A_{33}, A_{45}, A_{15});\ (A_{18}, A_{13}, A_{26});$

$(A_8, A_{49}, A_{29});\ (A_{49}, A_{36}, A_{46});\ (A_{29}, A_{34}, A_{27});\ (A_{36}, A_{19}, A_{16});\ (A_{46}, A_{11}, A_{29});$
$(A_{34}, A_{49}, A_{19});\ (A_{27}, A_{16}, A_{11});\ (A_{19}, A_8, A_{27});\ (A_{16}, A_{34}, A_{46});\ (A_{11}, A_{36}, A_8);$

$(A_9, A_{28}, A_{14});\ (A_{28}, A_{12}, A_{17});\ (A_{14}, A_{32}, A_{44});\ (A_{12}, A_{30}, A_{47});\ (A_{17}, A_{37}, A_{14});$
$(A_{32}, A_{28}, A_{30});\ (A_{44}, A_{47}, A_{37});\ (A_{30}, A_9, A_{44});\ (A_{47}, A_{32}, A_{17});\ (A_{37}, A_{12}, A_9).$

Используя оператор цикла τ_4, получим все тройки циклических шестиугольников подмножества $\boldsymbol{S}$.

$(A_1, A_{59}, A_{60}) \leftrightarrow (A_{27}, A_{26}, A_{28});\ (A_6, A_{20}, A_{46}) \leftrightarrow (A_{10}, A_{17}, A_{41});$

$(A_2, A_{22}, A_{48}) \leftrightarrow (A_{12}, A_{43}, A_{19});\ (A_7, A_{47}, A_{21}) \leftrightarrow (A_{11}, A_{18}, A_{42});$

$(A_3, A_{23}, A_{49}) \leftrightarrow (A_{13}, A_{14}, A_{38});\ (A_{29}, A_{33}, A_{58}) \leftrightarrow (A_{51}, A_{54}, A_{37});$

$(A_4, A_{24}, A_{44}) \leftrightarrow (A_8, A_{15}, A_{39});\ (A_{30}, A_{34}, A_{56}) \leftrightarrow (A_{35}, A_{52}, A_{55});$

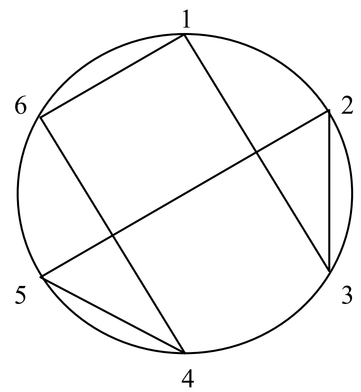
$(A_5, A_{25}, A_{45}) \leftrightarrow (A_{40}, A_9, A_{16});\ (A_{31}, A_{32}, A_{57}) \leftrightarrow (A_{36}, A_{50}, A_{53}).$

Подмножество $\boldsymbol{S}$ представлено парами троек циклических шестиугольников в соответствии с доказательством второй части теоремы о циклических шестиугольниках.

Рассмотрим пример построения циклических шестиугольников.

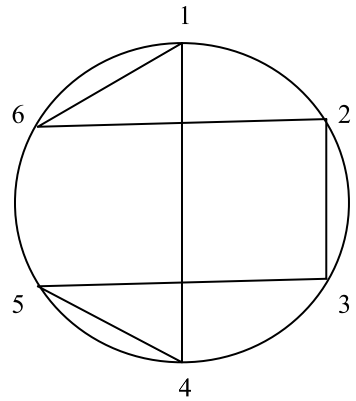
Пусть

$$A_{23}: \quad (a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}_1 :$$



$$(a_i)_2 = \tau_2 \cdot (a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}_2 ;$$

$$(a_i)_2 \ : \ A_{25}$$



$$(a_i)_3 = \tau_2 \cdot (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}_3 ;$$

$$(a_i)_3 \ : \ A_{58}$$

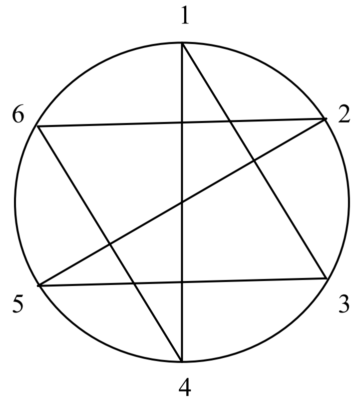


Рис.10

Очевидно, прямые Паскаля достаточно определять двумя точками.

$(AB) \equiv \alpha$; $(MN) \equiv \beta$; $(XY) \equiv \gamma$. Прямые α , β , γ пересекаются в одной точке $\boldsymbol{O}$.

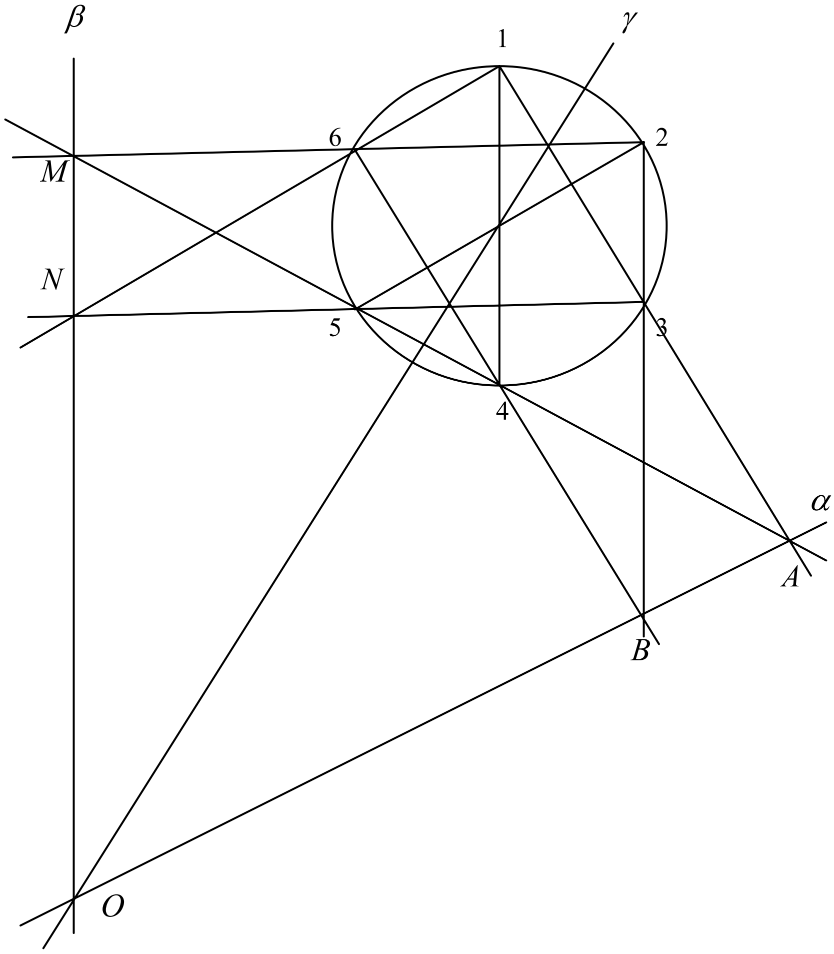


Рис.11

8. Заключение

Теперь вернёмся к Штейнеру, и попробуем понять, почему же им было найдено только 20 точек.

Якоб Штейнер, безусловно, принадлежал к числу самых ярких геометров своего времени. Он поистине был наделён божественным даром математической интуиции. Практически, являясь самоучкой, Штейнер получил признание математиков лишь в зрелом возрасте и всегда очень ревностно относился к приоритету своих математических открытий.

Руководствуясь в геометрии интуицией и силой своего воображения, Штейнер не любил использовать алгебраические средства и методы, и был ярким противником алгебраизации геометрии. Коллеги Штейнера, сторонники алгебраических методов, получали от него много несправедливой критики в свой адрес, а такой выдающийся математик, как Юлиус Плюккер даже вынужден был из-за этого оставить занятия геометрией.

Одним из главных принципов в математическом творчестве Штейнера был, так называемый, критерий красоты: если теория красива – значит она верна, и наоборот.

Занимаясь исследованием множества прямых Паскаля, Якоб Штейнер, как нам кажется, натолкнулся на тройку циклических шестиугольников из множества ***S***. Доказав теорему о циклических шестиугольниках (это наше предположение, и мы думаем, что на самом деле это была только вторая часть общей теоремы и доказательство было с использованием теоремы Дезарга) и ощутив всю её красоту, Штейнер, видимо, решил, что все возможные интересующие его пересечения прямых Паскаля найдены. Т.к. всё множество A шестиугольников было исчерпано и поделено на 20 троек циклических шестиугольников. Т.о. у Штейнера могло возникнуть ощущение полноты решаемой проблемы. Хотя трудно поверить в то, что Штейнер не заметил почти очевидную тройку шестиугольников (A_{56}, A_{57}, A_{58}), которая выпадает из его двадцатки.

Зная острый ум Штейнера и одновременно его тяжёлый характер, никто из математиков того времени, наверное, и не пытался продолжить исследования, а может быть и решили, что данная проблема решена окончательно и больше к ней уже не возвращались.

Оставшиеся же 60 точек были найдены спустя более чем 20 лет после открытия Штейнера и уже после его смерти.

В заключение заметим, что каждый из 60-ти шестиугольников из множества A присутствует в 4-х тройках и 3-х четвёрках шестиугольников, прямые Паскаля которых пересекаются в одной точке. Отсюда получаем:

$$\frac{3}{4}T^3 = \frac{4}{3}T^4 = A,$$

где T^4 - множество четвёрок шестиугольников, прямые Паскаля которых пересекаются в одной точке (Приложение 3).

Пример для A_2:

(A_2, A_{55}, A_{59});	(A_2, A_1, A_5, A_{35});
(A_2, A_6, A_{42});	$(A_2, A_{18}, A_{20}, A_{29})$;
(A_2, A_4, A_{38});	$(A_2, A_{13}, A_{24}, A_{32})$;
(A_2, A_{22}, A_{48}).	

Приложение 1

Задача о расположении хорд на окружности

Пусть на окружности имеем множество из n точек, взятых произвольным образом.

Задача:

Сколько существует способов (вариантов) взаимного расположения k хорд на данной окружности, не имеющих общих граничных точек (граничные точки хорд принадлежат множеству n).

Очевидно, что $k \le \frac{n}{2}$.

Решение:

Одну хорду на данной окружности можно расположить C_n^2 способом. Тогда k хорд, не имеющих общих граничных точек, можно расположить V способами:

$$V = \frac{1}{k} C_n^2 \cdot V_1 ,$$

где V_1 - число способов расположения $k-1$ хорды, среди оставшихся $n-2$ точек окружности. Т.е.

$$V_1 = \frac{1}{k-1} C_{n-2}^2 \cdot V_2 ,$$

и т.д..

В конце концов мы дойдём до случая, когда останется разместить одну хорду среди оставшихся $n-2(k-1)$ точек. Это можно будет сделать V_{k-1} способом:

$$V_{k-1} = C_{n-2(k-1)}^2 .$$

Т.о. получаем произведение из k сомножителей, которое можно записать общей формулой:

$$V = \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{k-1} C_{n-2i}^2 \right) = \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^{k} C_{n-2(i-1)}^2 \qquad (п1)$$

Пример 1. $n = 4$, $k = 2$.

$$V = \frac{1}{2} C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 3 .$$

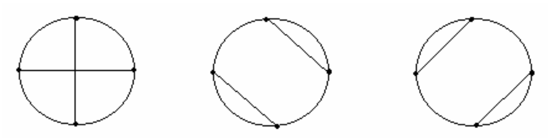


Рис.12

Пример 2. $n = 5$, $k = 2$.

$$V = \frac{1}{2} C_5^2 \cdot C_3^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 15 .$$

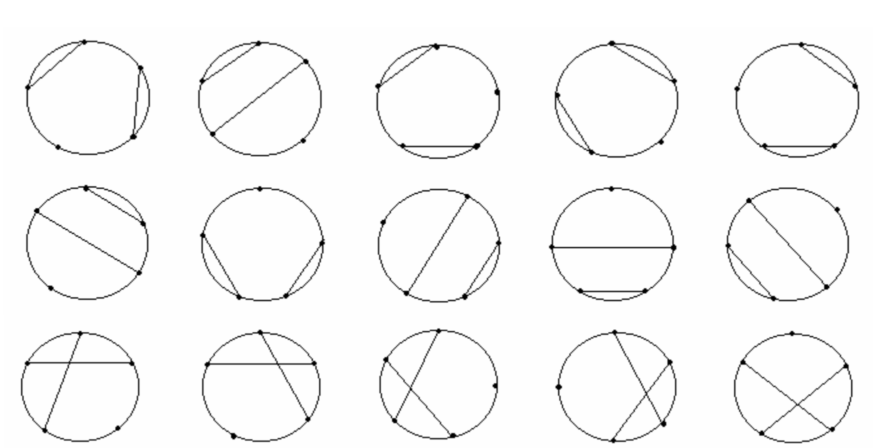
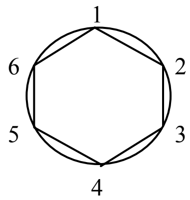


Рис.13

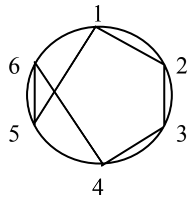
Приложение 2

Множество всех шестиугольников *A*

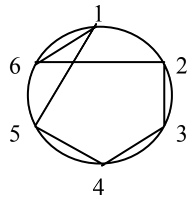
A_1



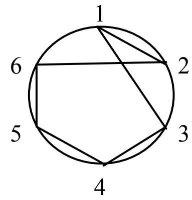
A_2



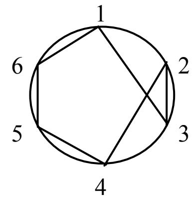
A_3



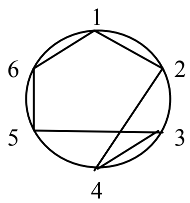
A_4



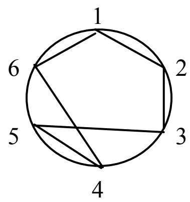
A_5



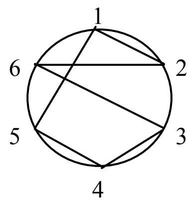
A_6



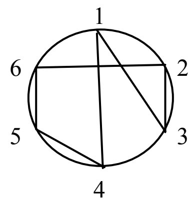
A_7



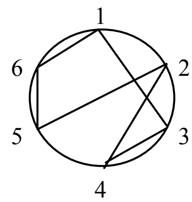
A_8



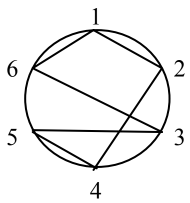
A_9



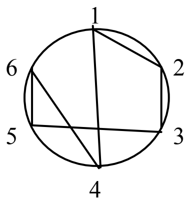
A_{10}



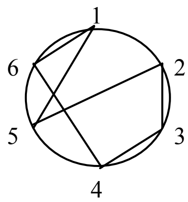
A_{11}



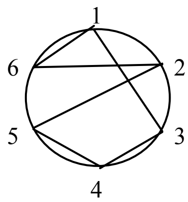
A_{12}



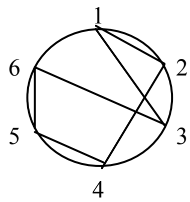
A_{13}



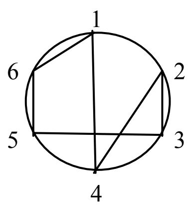
A_{14}



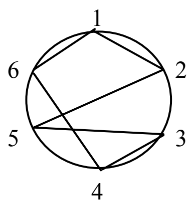
A_{15}



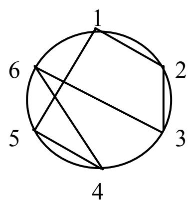
A_{16}



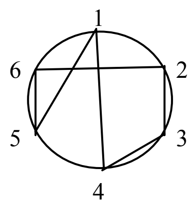
A_{17}



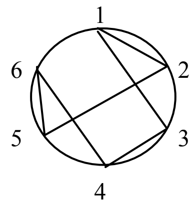
A_{18}



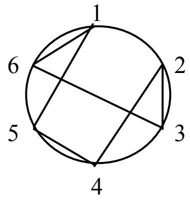
A_{19}



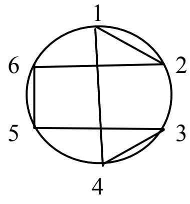
A_{20}



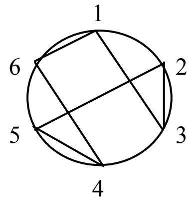
A_{21}



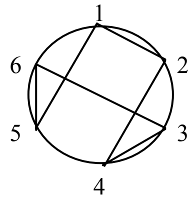
A_{22}



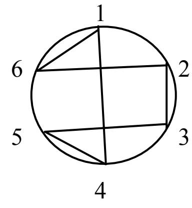
A_{23}

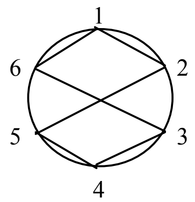


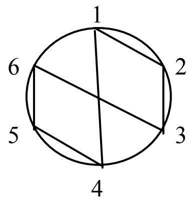
A_{24}

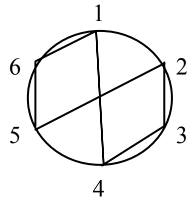


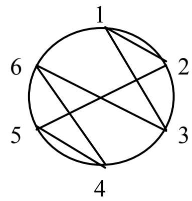
A_{25}

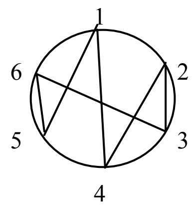


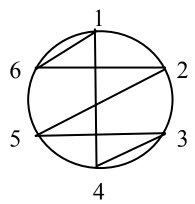
A_{26}


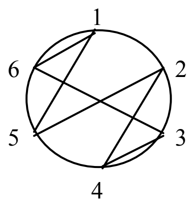
A_{27}


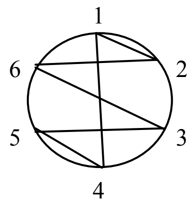
A_{28}


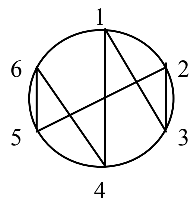
A_{29}


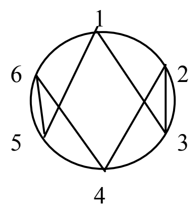
A_{30}


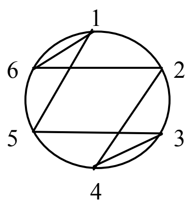
A_{31}


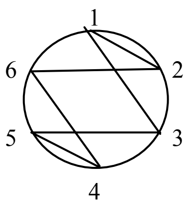
A_{32}


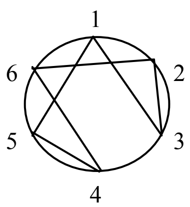
A_{33}


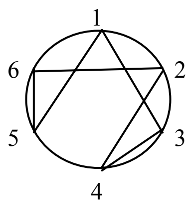
A_{34}


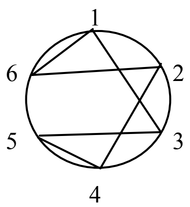
A_{35}


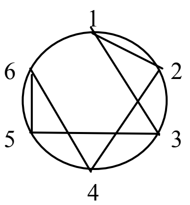
A_{36}


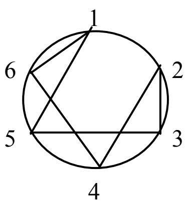
A_{37}


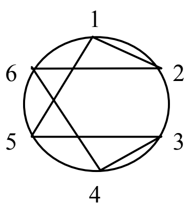
A_{38}


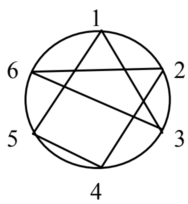
A_{39}


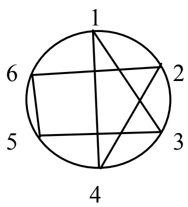
A_{40}


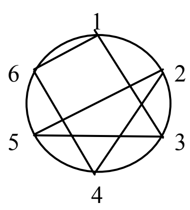
A_{41}


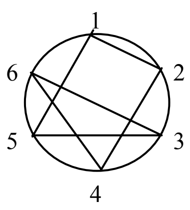
A_{42}


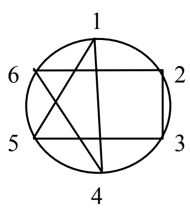
A_{43}


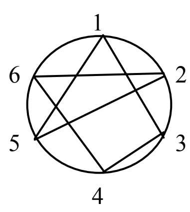
A_{44}


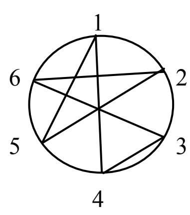
A_{45}


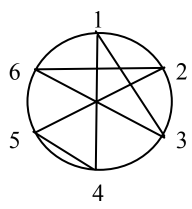
A_{46}


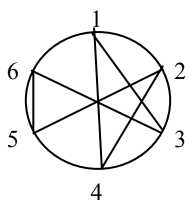
A_{47}


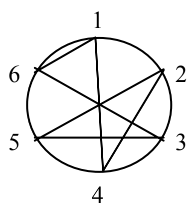
A_{48}


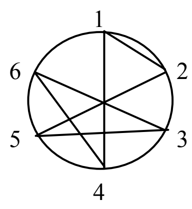
A_{49}


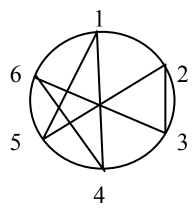
A_{50}


A_{51}


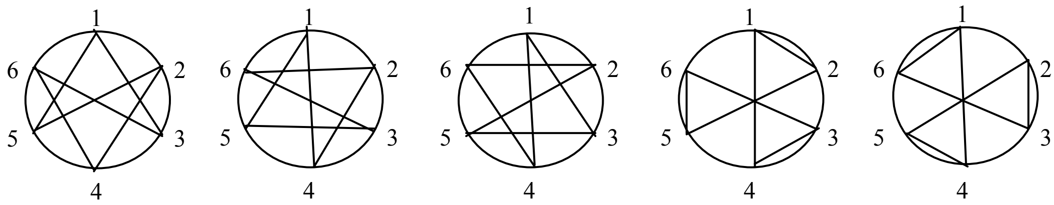
A_{52}


A_{53}


A_{54}


A_{55}


A_{56} A_{57} A_{58} A_{59} A_{60}



Приложение 3

Точки четвёртого порядка

В данном приложении мы покажем все точки, где пересекаются по четыре прямые Паскаля.

Рассмотрим некоторое подмножество $\boldsymbol{K_1}$ множества $\boldsymbol{K}$, состоящее из двух элементов:

$$\boldsymbol{K_1} = \{\boldsymbol{q_i}, \boldsymbol{q_j}\},$$

такое, что стороны q_i и q_j не имеют общих граничных точек. Пусть это будут стороны $\boldsymbol{q_i} = (\boldsymbol{a_1 a_2})$, $\boldsymbol{q_j} = (\boldsymbol{a_3 a_4})$.

Возникает
задача:
Сколькими способами можно построить шестиугольники на данной конике так, чтобы стороны $(\boldsymbol{a_1 a_2})$ и $(\boldsymbol{a_3 a_4})$ в каждом из них были бы противоположны.

Противоположными, при последовательном обходе шестиугольника по сторонам, являются первая и четвёртая, вторая и пятая, третья и шестая стороны.

Решение:
После того как мы определили две стороны $\boldsymbol{q_i}$ и $\boldsymbol{q_j}$, у нас осталось ещё две свободные точки $\boldsymbol{a_5}$ и $\boldsymbol{a_6}$. Т.е. точку $\boldsymbol{a_2}$ можно соединить с другими точками только двумя способами: либо с точкой $\boldsymbol{a_5}$, либо с точкой $\boldsymbol{a_6}$. А каждую из точек $\boldsymbol{a_5}$ и $\boldsymbol{a_6}$ можно также соединить с другими точками только двумя способами: либо с точкой $\boldsymbol{a_3}$, либо с точкой $\boldsymbol{a_4}$. Получаем четыре шестиугольника, у которых стороны $(\boldsymbol{a_1 a_2})$ и $(\boldsymbol{a_3 a_4})$ противоположны:

$$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_5}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{a_6});$$
$$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_5}, \boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_6});$$
$$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_6}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{a_5});$$
$$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_6}, \boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_5}).$$

Не трудно заметить, что если бы мы вели рассуждения не относительно точки a_2, а относительно любой другой из точек a_1, a_3, a_4, то всё равно получили бы те же самые четыре шестиугольника.

Т.о. точка $O \equiv ((a_1 a_2) \cap (a_3 a_4))$ будет точкой пересечения прямых Паскаля для полученных шестиугольников.

Выясним, сколько же всего существует таких точек.

Ответ на этот вопрос даёт решение задачи, рассмотренной в Приложении 1.

Мы имеем 6 точек на конике, следовательно $n = 6$. Стороны q_i и q_j не имеют общих граничных точек, т.е. $k = 2$. По формуле (п1) получаем:

$$V = \frac{1}{2} \cdot C_6^4 \cdot C_6^2 = 45$$

Т.о. существует 45 точек или 45 четвёрок шестиугольников, для которых прямые Паскаля пересекаются в одной точке.

Выписывать все четвёрки шестиугольников нет нужды, т.к. раньше мы уже определили их в общем виде. Обозначим множество всех таких точек через T^4.