Франц Герман

Теорема о поляре треугольника

(www.franz-hermann.com)

Теорема: **Если дан произвольный треугольник и произвольная коника, то точки пересечения сторон треугольника и поляр противоположных вершин лежат на одной прямой.**

Эту прямую мы и будем называть полярой данного треугольника относительно данной коники.

Итак, рассмотрим произвольный треугольник $A_1 A_2 A_3$ и произвольную конику G (Рис. 1).

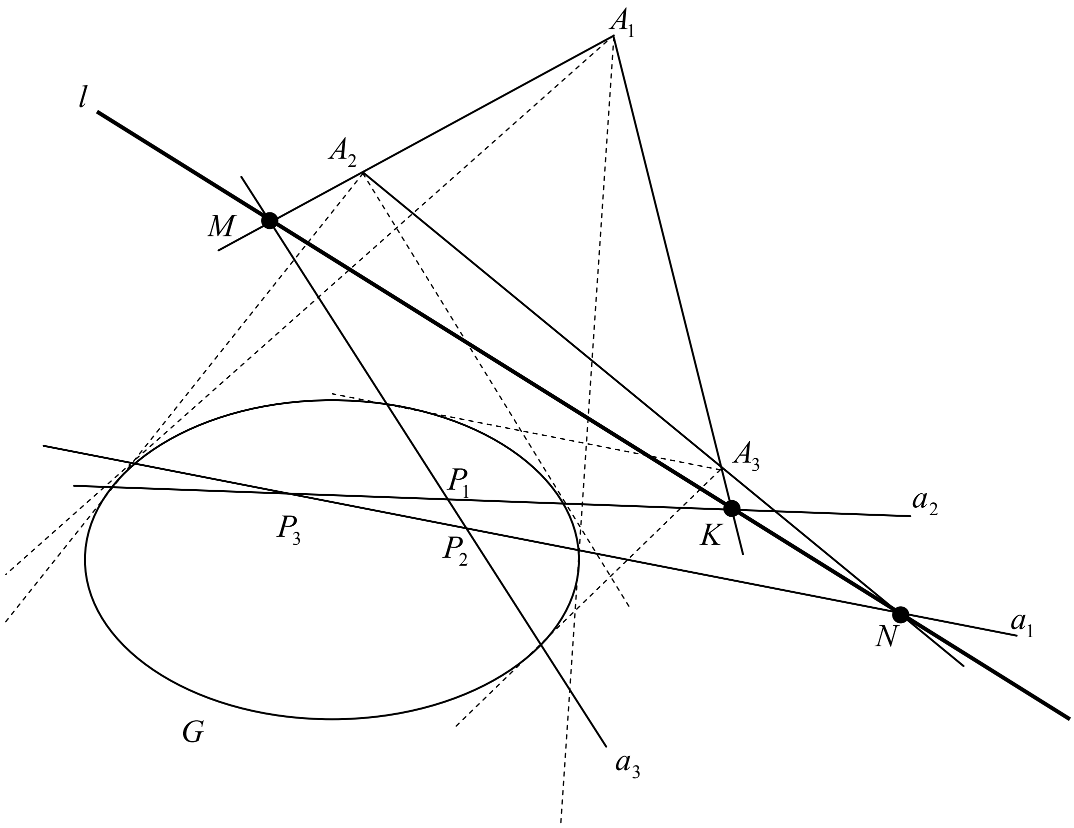

Рис. 1

Пунктирными линиями показано построение поляр.

a_1 - поляра вершины A_1, $N \equiv (A_2 A_3 \cap a_1)$.

a_2 - поляра вершины A_2, $K \equiv (A_1 A_3 \cap a_2)$.

a_3 - поляра вершины A_3, $M \equiv (A_1 A_2 \cap a_3)$.

Докажем, что точки ***N, K, M*** лежат на одной прямой l - поляре треугольника.

Автор не ставил своей целью найти короткое и красивое доказательство. Задача стояла – доказать теорему.

Доказательство:

Как известно произвольная коника имеет в общем виде такое уравнение:

$$G: \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{3} g_{ij} x_i x_j = 0 \text{ или } g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0.$$

Пусть треугольник $A_1A_2A_3$ определяет проективный репер $\{A_1, A_2, A_3, E\}$, т.е. $A_1(1:0:0);\ A_2(0:1:0);\ A_3(0:0:1);\ E(1:1:1)$. Тогда уравнение поляры точки A_3 будет иметь вид:

$$g_{11}\cdot 0\cdot x_1 + g_{22}\cdot 0\cdot x_2 + g_{33}\cdot 1\cdot x_3 + g_{12}(x_1\cdot 0 + x_2\cdot 0) + g_{13}(x_1\cdot 1 + x_3\cdot 0) + g_{23}(x_2\cdot 1 + x_3\cdot 0) =$$
$$= g_{33}x_3 + g_{13}x_1 + g_{23}x_2 = 0.$$

Уравнение прямой A_1A_2 в данном репере будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x_3 = 0.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ g_{33}x_3 + g_{13}x_1 + g_{23}x_2 = 0 \end{cases}$$

найдём координаты точки $M(g_{23} : -g_{13} : 0)$.

Аналогично находятся координаты точек $K(g_{23} : 0 : -g_{12})$ и $N(0 : g_{13} : -g_{12})$.

Убедимся, что точки N, K, M лежат на одной прямой, т.е. определитель, составленный из координат этих точек должен быть равен нулю. Действительно:

$$\begin{vmatrix} g_{23} & -g_{13} & 0 \\ g_{23} & 0 & -g_{12} \\ 0 & g_{13} & -g_{12} \end{vmatrix} = g_{23}g_{12}g_{13} - g_{23}g_{12}g_{13} = 0.$$

Найдём уравнение поляры тругольника.

$$l: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ g_{23} & -g_{13} & 0 \\ g_{23} & 0 & -g_{12} \end{vmatrix} = x_1g_{12}g_{13} + x_2g_{12}g_{23} + x_3g_{13}g_{23} = 0 \text{ или}$$

$$\frac{x_1}{g_{23}} + \frac{x_2}{g_{13}} + \frac{x_3}{g_{12}} = 0 \text{ при } g_{12} \neq g_{13} \neq g_{23} \neq 0$$

Как и для всякой теоремы проективной геометрии справедлива двойственная ей

Теорема: **Если дан пройзвольный треугольник и произвольная коника, то прямые, проходящие через вершины треугольника и полюсы противоположных сторон, пересекаются в одной точке.**

Мы будем называть эту точку полюсом данного треугольника относительно данной коники.

Доказательство:

Введём обозначения:

$$P_1 \equiv (a_2 \cap a_3) \text{ - полюс } A_2A_3$$

$$P_2 \equiv (a_1 \cap a_3) \text{ - полюс } A_1A_3$$

$$P_3 \equiv (a_1 \cap a_2) \text{ - полюс } A_1A_2$$

Рассмотрим треугольники $A_1A_2A_3$ и $P_1P_2P_3$. $(P_1P_2 \cap A_1A_2) \equiv M$; $(P_1P_3 \cap A_1A_3) \equiv K$; $(P_2P_3 \cap A_2A_3) \equiv N$, но точки ***N, K, M*** лежат на одной прямой, следовательно, по теореме Дезарга, прямые A_1P_1, A_2P_2 и A_3P_3 пересекаются в одной точке S. Что и требовалось доказать.

Следствие: точка S является полюсом прямой l относительно данной коники.

Доказательство:

Точка $K \in A_1A_3$, точка P_2 является полюсом прямой A_1A_3, следовательно точка K сопряжена с точкой P_2. Также точка $K \in a_2$, следовательно K сопряжена с точкой A_2. Следовательно точка K является полюсом прямой A_2P_2. Рассуждая аналогично, можно показать, что точка M является полюсом прямой A_3P_3. Но $S \equiv (A_2P_2 \cap A_3P_3)$, следовательно S сопряжена с точкой K и с точкой M, а т.к. $K \in l$ и $M \in l$, то точка S является полюсом прямой l. Что и требовалось доказать.

Примеры задач, при решении которых используется теорема «о поляре треугольника»

Задача 1. Дана прямая ***AC***, точка ***C*** и точка ***B*** и поляры точек ***A***, ***B***, ***C*** относительно некоторой коники.
Построить точку ***A***.

Решение :

Обозначим на рисунке (Рис. 2) прямую ***AC* – *(ac)***, поляры точек ***A***, ***B***, ***C*** буквами ***a***, ***b***, ***c*** соответственно.

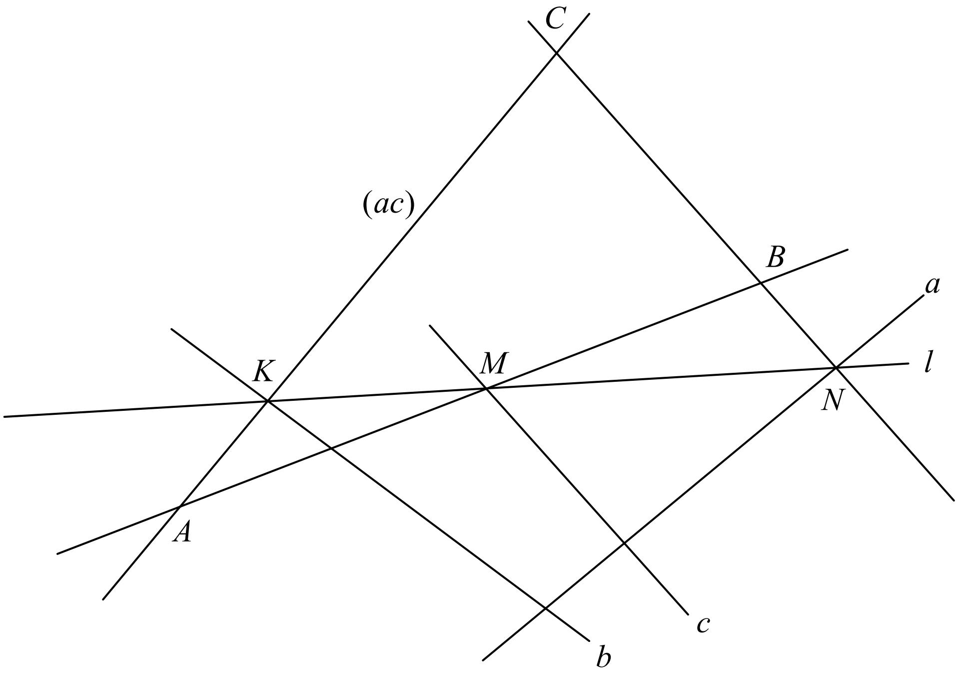

Рис. 2

Построим поляру треугольника ***ABC***. Обозначим её - ***l***. Для этого найдём точку пересечения $\boldsymbol{N \equiv (CB \cap a)}$ и точку пересечения $\boldsymbol{K \equiv ((ac) \cap b)}$. Прямая ***l*** пройдёт через эти точки.

В силу теоремы «о поляре треугольника», прямая ***AB*** должна пересекать поляру ***c*** в точке $\boldsymbol{M \in l}$, т.е. $\boldsymbol{M \in AB}$. Проведём ***MB*** до пересечения с прямой ***(ac)***. Это и будет искомая точка ***A***.

Задача 2. Даны точки ***A***, ***B***, ***C*** и поляры точек ***A*** и ***B***. И также одна точка, принадлежащая поляре точки ***C*** (все полярные отношения заданы относительно одной и той же некоторой коники).
Построить поляру точки ***C***.

Решение:

Обозначим поляры точек ***A*** и ***B*** через ***a*** и ***b*** соответственно (Рис. 3). Построим поляру ***l*** треугольника ***ABC***.

$$(\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{BC}) \equiv \boldsymbol{M}; \ \ (\boldsymbol{b} \cap \boldsymbol{AC}) \equiv \boldsymbol{K}; \ \ \boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{MK}\,.$$

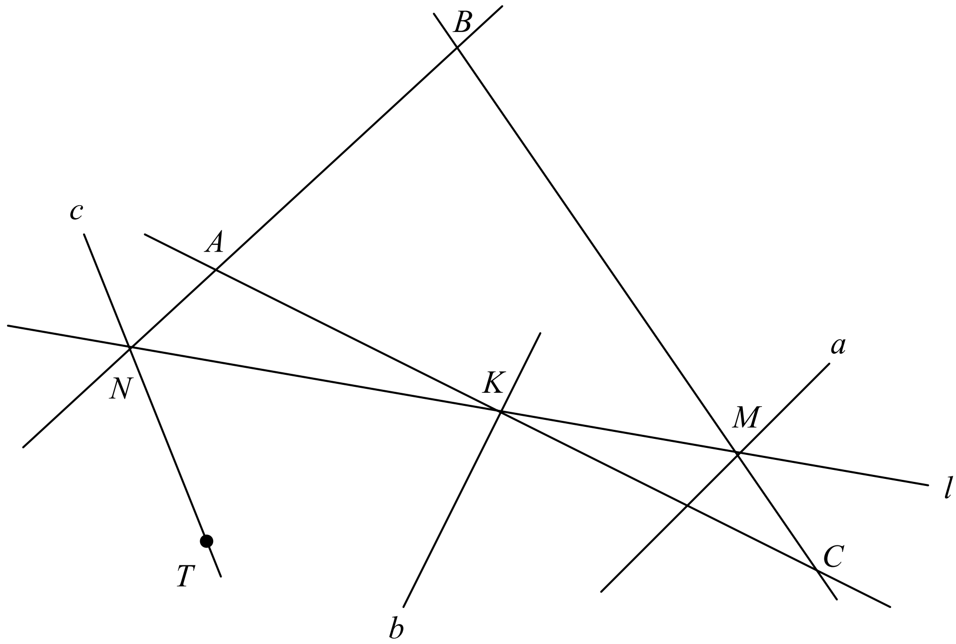

Рис. 3

Обозначим точку, принадлежащую поляре точки ***C***, через ***T***. $(\boldsymbol{AB} \cap \boldsymbol{l}) \equiv \boldsymbol{N}$, тогда, в силу теоремы «о поляре тругольника», поляра $\boldsymbol{c} \equiv \boldsymbol{TN}$.

Задача 3. Даны две прямые и точка, принадлежащая третьей, а также – три поляры точек пересечения этих трёх прямых, относительно некоторой коники. Построить третью прямую.

Решение:

Обозначим точку пересечения данных прямых через ***A***, а поляру, ей соответствующую, через ***a***. Данные прямые обозначим через ***(ac)*** и ***(ab)***.

Будем считать, что точка ***C*** принадлежит прямой ***(ac)***, а точка ***B*** - прямой ***(ab)*** соответственно, и ***CB*** является искомой прямой. Тогда данные поляры, соответствующие точкам ***C*** и ***B***, обозначим соответственно через ***c*** и ***b*** (Рис. 4).

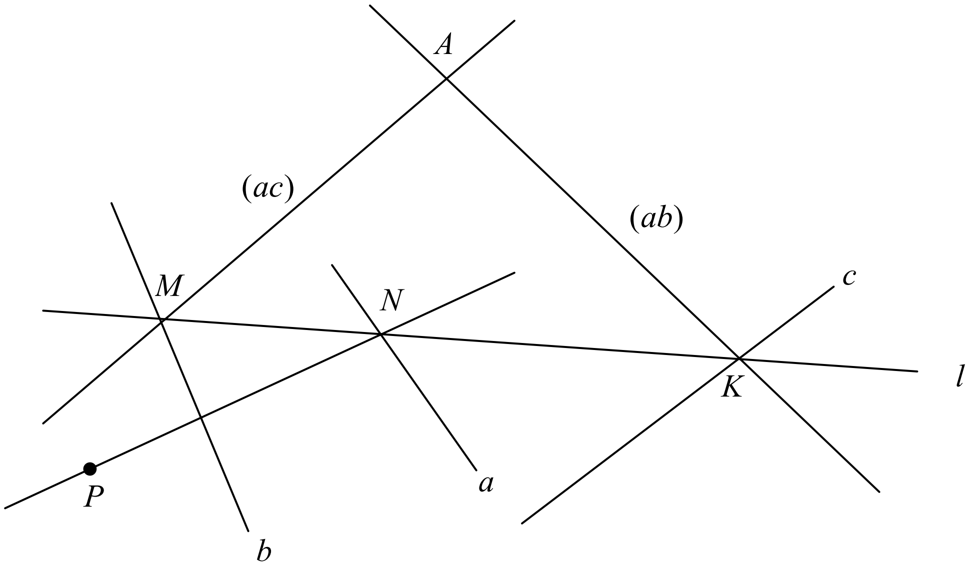

Рис. 4

$((ac) \cap b) \equiv M, \quad ((ab) \cap c) \equiv K$, тогда $l \equiv MK$ - поляра треугольника ***ABC***. В силу теоремы «о поляре треугольника» $(a \cap l) \equiv N$ и $N \in BC$, но по условию задачи точка ***P*** также принадлежит прямой ***BC***. Следовательно прямая ***PN*** и является искомой прямой.

Задача 4. Даны три точки ***A***, ***B***, ***C***; прямая ***b*** является полярой точки ***B***, точка ***K*** принадлежит поляре точки ***A***, точка ***D*** принадлежит поляре треугольника ***ABC***. Все полярные отношения рассматриваются относительно одной и той же некоторой коники.

Построить поляру точки ***A***.

Решение:

Обозначим через ***l*** поляру треугольника ***ABC***, а через ***a*** поляру точки ***A***. Проведём прямую ***AC*** до пересечения с полярой ***b***. Поглученную точку обозначим через ***M***. Тогда $MD \equiv l$. Проведём ***BC*** до пересечения с полярой ***l***. Обозначим полученную точку через ***N***. В силу теоремы «о поляре треугольника» $N \in a$, но по условию задачи точка $K \in a$. Следовательно искомая поляра $a \equiv KN$ (Рис.5).

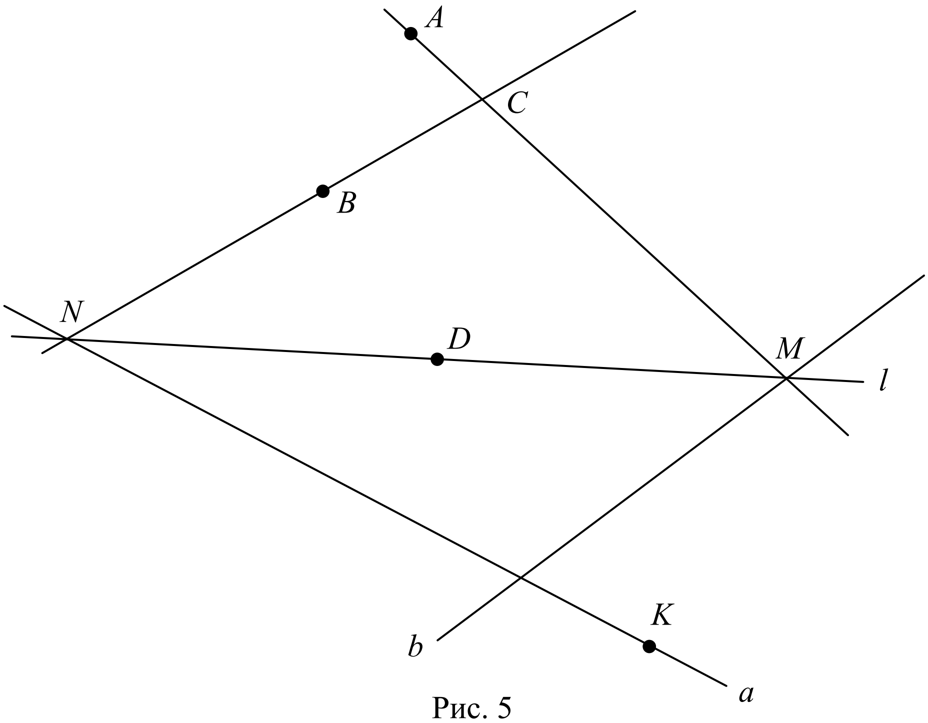

Рис. 5

Задача 5. Даны точки ***A***, ***B***, ***C***. Точка ***A*** принадлежит некоторой окружности. Дана также поляра точки ***C*** и поляра треугольника ***ABC*** относительно этой окружности (назовём такую окружность – окружностью поляры данного треугольника).

Построить окружность поляры треугольника ***ABC***.

Решение:

Обозначим поляру точки ***C*** и поляру треугольника ***ABC*** соответственно через *c* и ***l***.

В силу теоремы «о поляре треугольника» прямые ***AB***, ***c*** и ***l*** пересекаются в одной точке.

Покажем, что центр искомой окружности лежит на прямой, перпендикулярной прямой ***c*** и проходящей через точку ***C***.

Возможны три случая.

1. Пусть точка ***C*** лежит вне искомой окружности. Построим поляру точки ***C*** (Рис. 6).

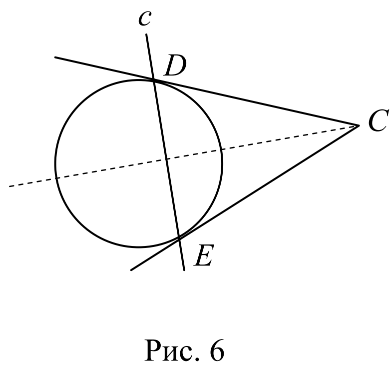

Рис. 6

DC и ***CE*** - касательные к оеружности, следовательно треугольник ***DCE*** - равнобедренный, следовательно перпендикуляр, проведённый через точку ***C*** к ***DE***, пройдёт через центр окружности.

2. Пусть точка ***C*** лежит на окружности (Рис. 7).

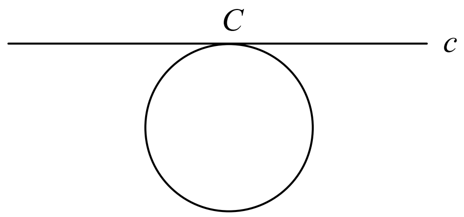

Рис. 7

Поляра точки ***C*** будет касательной к окружности в этой точке, т.е. перпендикуляр, восставленный в точке ***C*** к прямой c, пройдёт через центр окружности.

3. Пусть точка ***C*** лежит внутри окружности (Рис. 8).

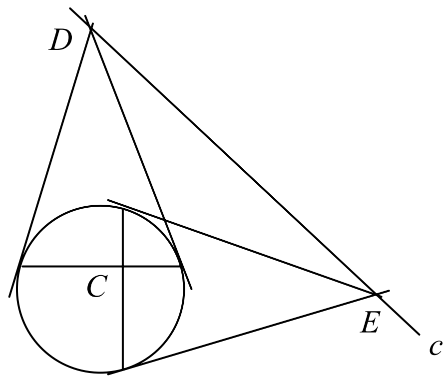

Рис. 8

Проведём через ***C*** две хорды одинаковой длины (это всегда можно сделать). На этих хордах, как на основаниях, построим равнобедренные треугольники, боковые стороны которых являются касательными к этой окружности. Тогда прямая, проходящая через вершины ***D*** и ***E*** полученных, будет полярой точки ***C***. Из Рис. 8 очевидно следует, что прямая, перпендикулярная ***DE*** и проходящая через точку ***C***, проходит через центр окружности.

Теперь вернёмся к нашей задаче. Мы имеем точку ***C*** и её поляру. Следовательно прямая, перпендикулярная ***c*** и проходящая через точку ***C***, бедет проходить через центр искомой окружности.

Построим прямую ***m***, перпендикулярную ***c*** и проходящую через точку ***C*** (Рис. 9).

AN - касательная к искомой окружности и точка ***A*** принадлежит этой окружности по условию.

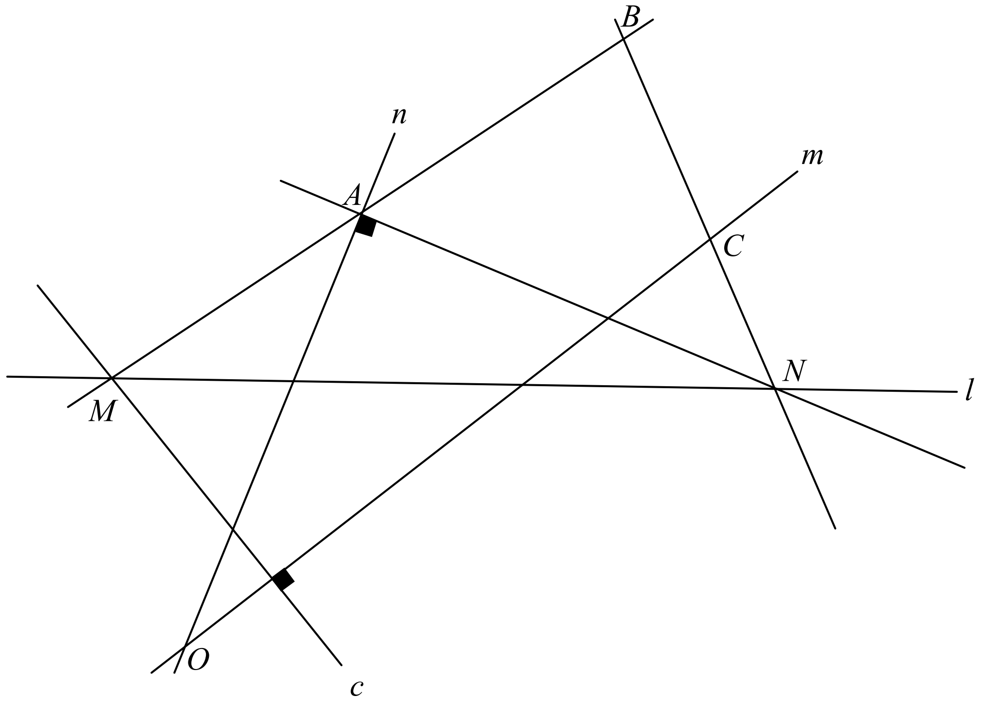

Рис. 9

Построим прямую ***n***, перпендикулярную ***AN*** и проходящую через точку ***A***, тогда центр искомой окружности - $\boldsymbol{O \equiv (n \cap m)}$.

Строим искомую окружность с центром в точке ***O*** и радиусом ***OA***.

Задача 6. Треугольник ***ABC*** описан около данной окружности. Доказать, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания окружности и противоположной стороны, пересекаются в одной точке (частный случай теоремы Брианшона).

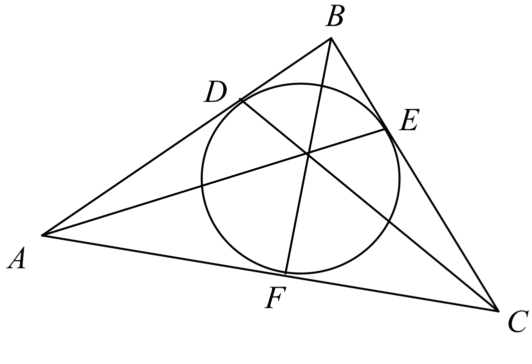

Рис. 10

Решение:

Точка ***D*** является полюсом поляры ***AB***, точка ***E*** - полюс ***BC***, ***F*** - полюс ***AC***. Тогда в силу двойственной теоремы «о проляре треугольника», прямые ***CD***, ***AE*** и ***BE*** будут пересекаться в одной точке.

Что и требовалось доказать.

Задача 7. Треугольник $\boldsymbol{ABC}$ вписан в окружность. Доказать, что касательные, проходящие через вершины треугольника, пересекаются со сторонами, противрположными данным вершинам, в точках, лежащих на одной прямой (частный случай теоремы Паскаля, Рис. 11).

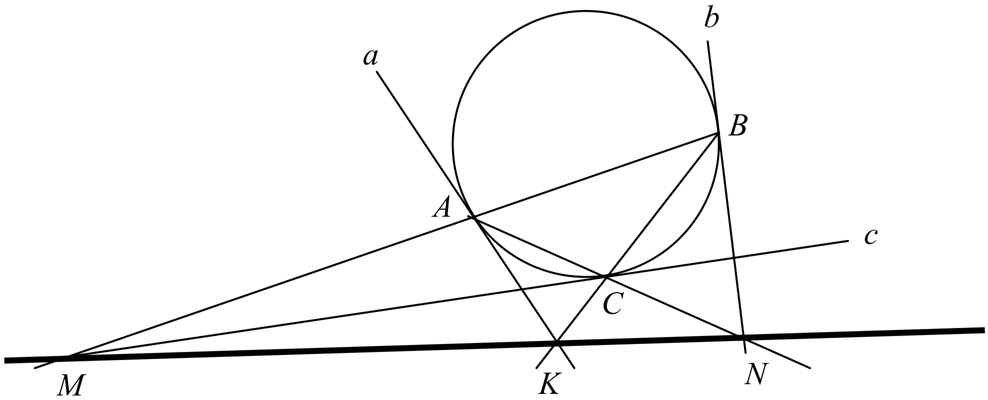

Рис. 11

Решение:

Прямая $\boldsymbol{a}$ является полярой вершины $\boldsymbol{A}$ данного треугольника. Прямые $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ являются полярами точек $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ соответственно. Тогда в силу теоремы «о поляре треугольника» точки $\boldsymbol{M \equiv (AB \cap c)}$, $\boldsymbol{K \equiv (BC \cap a)}$ и $\boldsymbol{N \equiv (AC \cap b)}$ будут лежать на одной прямой.

Что и требовалось доказать.

Задача 8: Дана окружность, вершины $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и поляра $\boldsymbol{l}$ треугольника $\boldsymbol{ABC}$. Построить точку $\boldsymbol{C}$.

Решение:

Сделаем чертёж (Рис. 12).

Построим поляру точки $\boldsymbol{A}$ - $\boldsymbol{a}$. $\boldsymbol{(a \cap l) \equiv K}$.

Построим поляру точки $\boldsymbol{B}$ -$\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{(b \cap l) \equiv M}$.

В силу теоремы «о поляре треугольника», прямая $\boldsymbol{AC}$ должна проходить через точку $\boldsymbol{M}$, а прямая $\boldsymbol{BC}$ должна проходить через точку $\boldsymbol{K}$.

Построим $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{BC}$, тогда $\boldsymbol{C \equiv (AM \cap BK)}$.

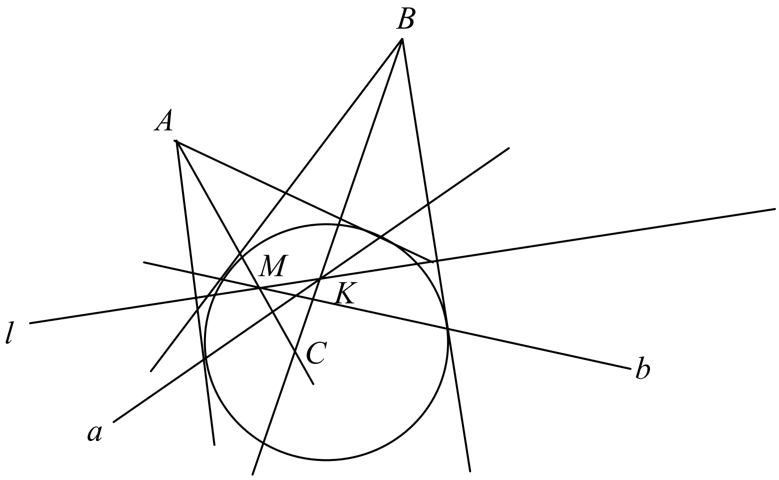

Рис. 12

Задача 9 (Теорема о бесконечно удалённой поляре треугольника):

Если центр окружности поляры треугольника ***ABC*** является ортоцентром данного треугольника, то его поляра будет бесконечно удалённой прямой.

Решение:

Обозначим поляру треугольника ***ABC*** через ***l***, а поляры вершин ***A***, ***B***, ***C*** через ***a***, ***b*** и ***c*** соответственно. Тогда $M \equiv (AB \cap c)$, $K \equiv (BC \cap a)$ и $N \equiv (AC \cap b)$ где ***M***, ***K*** и ***N*** принадлежат прямой ***l***.

Усли две из точек ***M***, ***K*** и ***N*** будут бесконечно удалёнными, то и прямая ***l*** будет бесконечно удалённой прямой.

Пусть для определённости – это будут точки ***M*** и ***K***. Тогда ***AB*** || ***c*** и ***BC*** || ***a*** (Рис. 13).

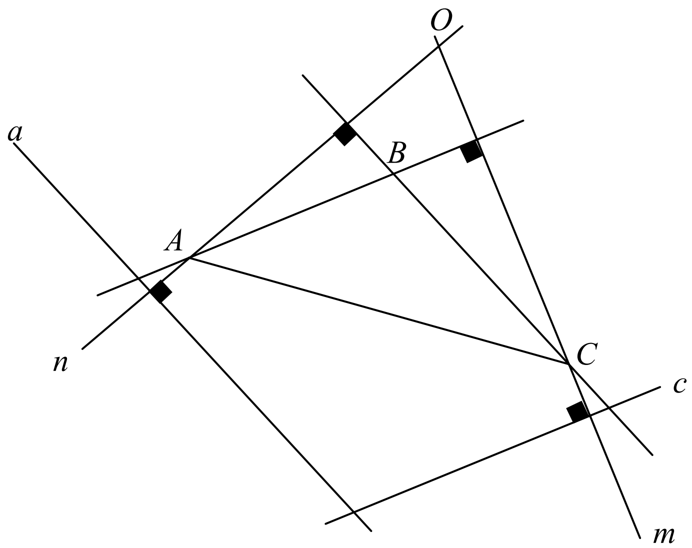

Рис. 13

Построим центр окружности поляры данного треугольника.

Для этого проведём прямую ***m*** перпендикулярно прямой ***c*** через точку ***C***, а прямую ***n*** - перпендикулярно прямой ***a*** через точку ***A***. Тогда искомый центр окружности - $\boldsymbol{O \equiv (m \cap n)}$. Но т.к. ***AB*** || ***c*** и ***BC*** || ***a***, то точка ***O*** будет одновременно и ортоцентром данного треугольника.

Что и требовалось доказать.

Задача 10: Дана окружность и две вершины ***A*** и ***B*** невырожденного треугольника ***ABC***, не принадлежащие данной окружности. Известно, что одна из сторон треугольника ***ABC*** является его полярой относительно данной окружности.
Построить треугольник ***ABC***.

Решение:

Предположим, что сторона ***AB*** является полярой треугольника ***ABC*** - ***l***. Построим поляру точки ***A*** - ***a*** (Рис. 14).

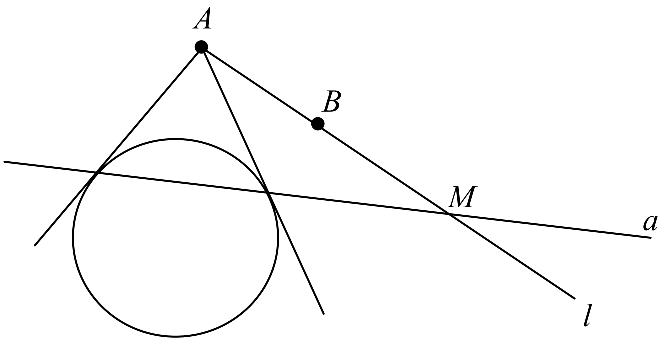

Рис. 14

$\boldsymbol{M \equiv (AB \cap a)}$, но прямая ***BC*** также должна пересекать прямую ***l*** в точке ***M***, и т.к. $\boldsymbol{B \in l}$, по нашему предположению, то и точка ***C*** должна принадлежать прямой ***l***. Следовательно треугольник ***ABC*** будет вырожденным, что противоречит условию задачи. Следовательно прямая ***AB*** не может являться полярой нашего треугольника.

Пусть прямая ***AC*** является полярой треугольника ***ABC***. Пусть поляра точки ***A*** пересекает прямую ***BC*** в некоторой точке ***K***. Следовательно точка ***K*** лежит на проляре треугольника ***AC***. Т.е. прямая *AC* проходит через точку ***K*** и прямая ***BC*** также проходит через точку ***K***. Отсюда заключаем, что $\boldsymbol{K \equiv C}$.

Т. о. получаем, что геометрическим местом для точек ***C*** будет поляра точки ***A***. Получаем бесконечное множество треугольников ***ABC***, у которых одна из сторон (***AC*** или ***BC***) является полярой треугольника.

Задача 11 Дан треугольник ***ABC*** и его поляра, относительно некоторой окружности. Известно, что точки ***A*** и ***B*** принадлежат этой окружности.
Построить окружность поляры данного треугольника.

Решение:

Обозначим поляру треугольника $\boldsymbol{ABC}$ через $\boldsymbol{l}$.

Пусть $\boldsymbol{M \equiv (BC \cap l)}$, (Рис. 15).

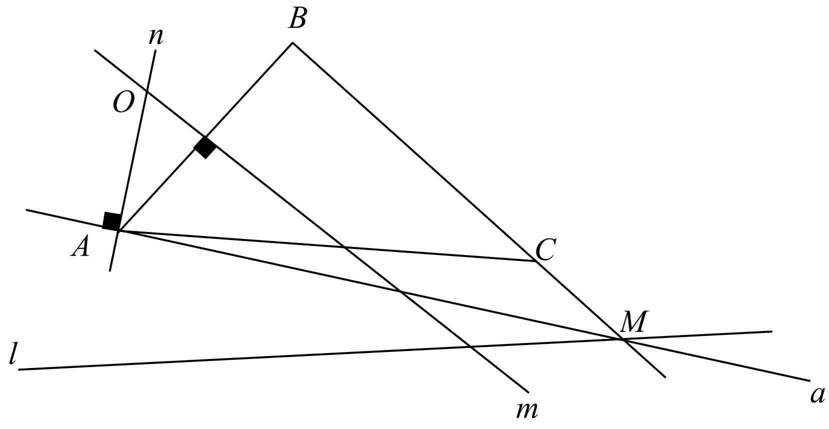

Рис. 15

Поляра точки $\boldsymbol{A}$ - $\boldsymbol{a}$ также должна проходить через точку $\boldsymbol{M}$. Но т.к. $\boldsymbol{A}$ принадлежит окружности, то $\boldsymbol{AM \equiv a}$.

Проведём прямую $\boldsymbol{n}$ через точку $\boldsymbol{A}$ и перпендикулярно прямой $\boldsymbol{a}$. Проведём прямую $\boldsymbol{m}$ перпендикулярно стороне $\boldsymbol{AB}$ и проходящую через середину отрезка $\boldsymbol{AB}$. Тогда точка $\boldsymbol{O \equiv (m \cap n)}$ будет центром искомой окружности. Искомая окружность строится радиусом $\boldsymbol{OA}$ из центра $\boldsymbol{O}$.

Задача 12 Дан треугольник $\boldsymbol{ABC}$, его поляра, относительно некоторой окружности и точка $\boldsymbol{D}$, принадлежащая поляре точки $\boldsymbol{A}$. Известно также, что точка $\boldsymbol{B}$ принадлежит окружности поляры данного треугольника.

Построить окружность поляры треугольника.

Решение:

Обозначим поляру треугольника $\boldsymbol{ABC}$ через $\boldsymbol{l}$.

Пусть точка $\boldsymbol{M \equiv (AC \cap l)}$. Поляра точки $\boldsymbol{B}$ также должна проходить через точку $\boldsymbol{M}$ и т.к. точка $\boldsymbol{B}$ лежит на искомой окружности по условию задачи, то $\boldsymbol{BM \equiv b}$ - является полярой точки $\boldsymbol{B}$ (Рис. 16).

Проведём прямую $\boldsymbol{n}$ через точку $\boldsymbol{B}$ и перпендикулярно прямой $\boldsymbol{BM}$.

Пусть $\boldsymbol{N \equiv (BC \cap l)}$.Следовательно точка $\boldsymbol{N}$ принадлежит поляре точки $\boldsymbol{A}$. Точка $\boldsymbol{D}$ также принадлежит поляре точки $\boldsymbol{A}$ по условию задачи, следовательно поляра точки $\boldsymbol{A}$ - $\boldsymbol{a \equiv DN}$.

Проведём прямую m через точку $\boldsymbol{A}$ и перпендикулярно прямой $\boldsymbol{a}$. Тогда точка $\boldsymbol{O \equiv (m \cap n)}$ будет центром искомой окружности.

Строим окружность с центром в точке $\boldsymbol{O}$ и радиусом $\boldsymbol{OB}$.

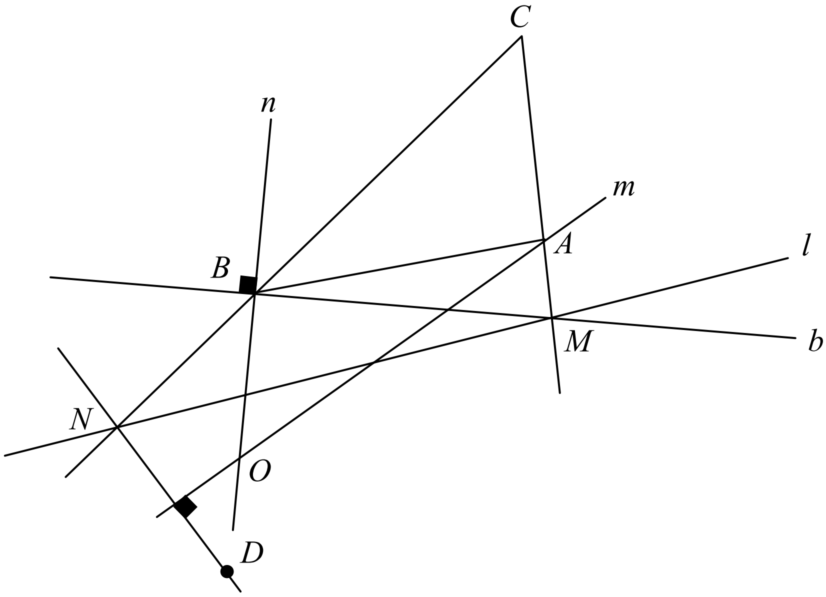

Рис. 16

Задача 13 Дан треугольник ***ABC***, поляра ***b*** точки ***B*** относительно некоторой окружности, точка ***K*** принадлежит поляре точки ***A***, точка ***M*** принадлежит поляре точки ***C***. Известно также, что центр окружности поляры треугольника лежит на прямой ***CM***.

Построить поляру точки ***A***.

Решение:

Построим точку $N \equiv (AC \cap b)$. Т.к. центр окружности принадлежит прямой ***CM*** и ***M*** принадлежит поляре точки ***C***, то ***c*** перпендикулярна ***CM***.

Пусть $D \equiv (AB \cap c)$, следовательно $ND \equiv l$ - поляра треугольника ***ABC***.

Пусть $E \equiv (BC \cap l)$, тогда $E \in a$ и, т.к. $K \in a$ по условию, то ***EK*** - поляра точки ***A*** (Рис. 17).

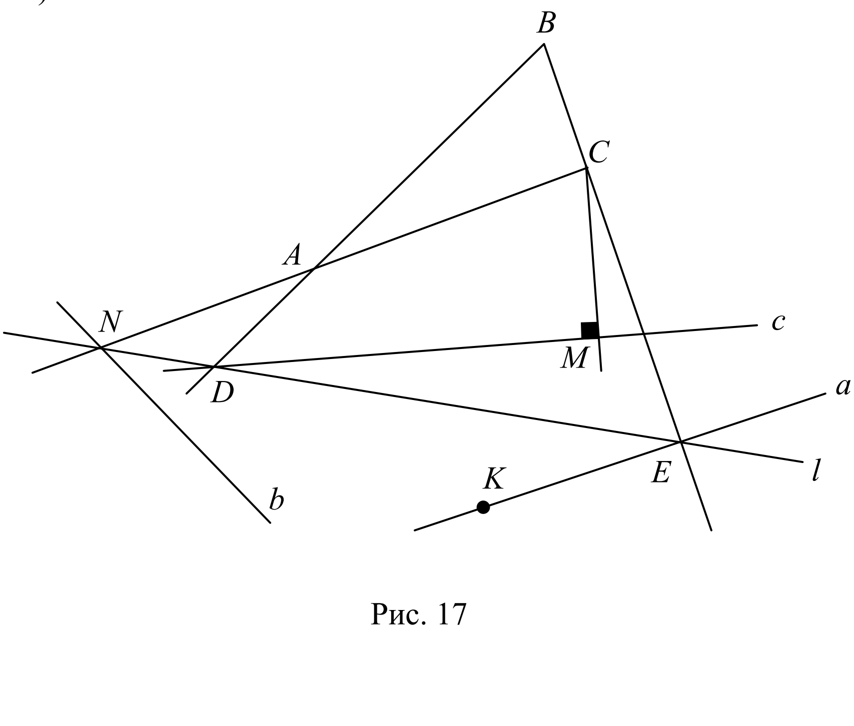

Рис. 17