Франц Герман

Теоремы проективной геометрии

(www.franz-hermann.com)

Теорема о перспективных треугольниках

Теорема: **Если два перспективных треугольника $A_1A_2A_3$ и $A_1^*A_2^*A_3^*$ соответственно, вписаны в произвольную конику G, то точки пересечения сторон A_iA_j (или сторон $A_i^*A_j^*$) и поляр вершин A_k^* (или вершин A_k) лежат на одной прямой l (или прямой l^*). Причём ось перспективы данных треугольников и прямые l и l^* пересекаются в одной точке.**

Прямую l будем называть псевдоосью перспективы.

Доказательство:

Выберем проективный репер $\boldsymbol{R}=\{A_1, A_2, A_3, S\}$, где $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$, $S(1:1:1)$ Рис. 18.

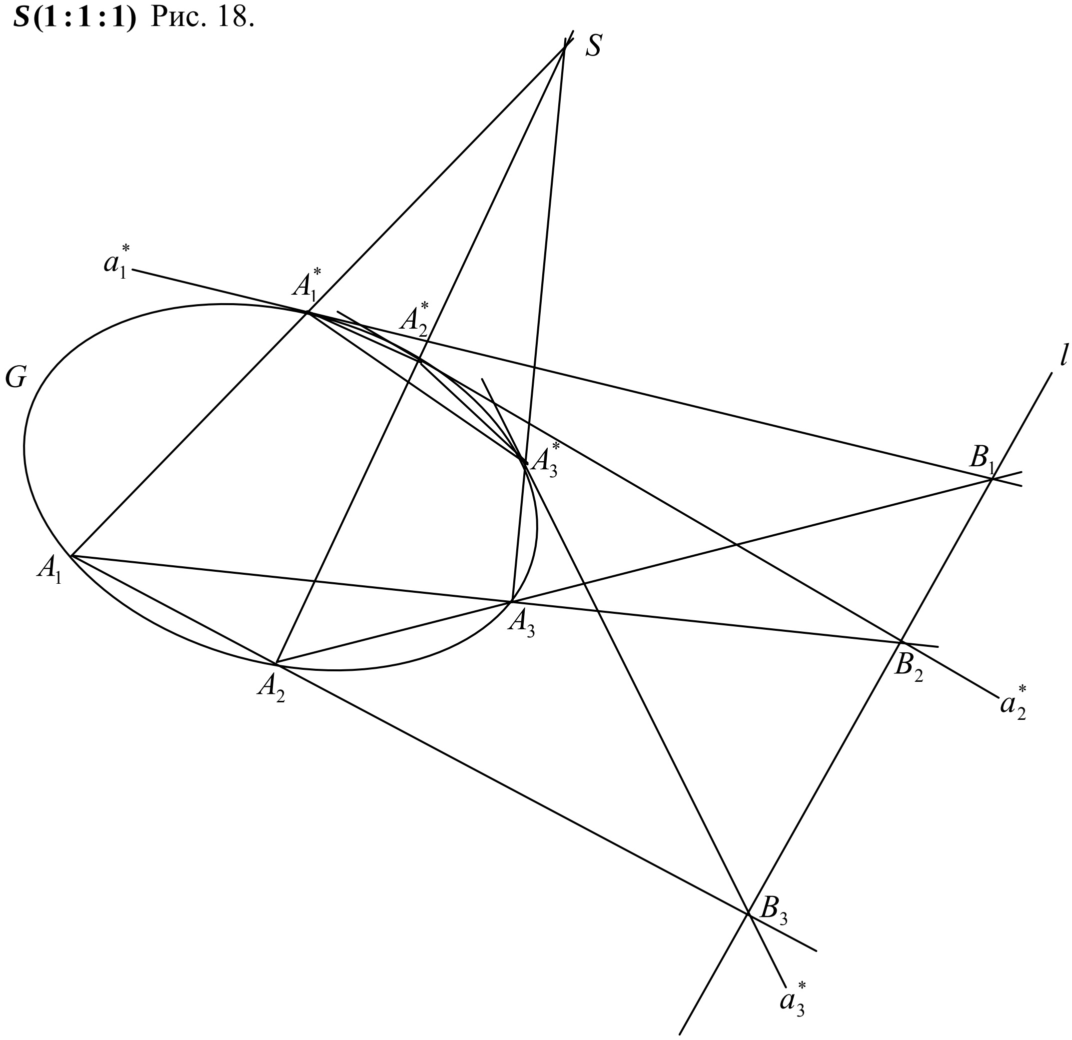

Рис. 1

Уравнение коники G в выбранном репере будет иметь вид:

$$G \qquad g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3 = 0; \text{ (здесь } g_{ij} = g_{ji}\text{)}.$$

Найдём уравнения прямых SA_1, SA_2, SA_3.

$$SA_1: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x_2 - x_3 = 0;$$

$$SA_2: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x_3 - x_1 = 0;$$

$$SA_3: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2 = 0;$$

Найдём координаты точек A_1^*, A_2^*, A_3^* в репере R, т.е. $A_i^* \equiv (SA_i \cap G)$.

$$A_1^*: \quad \begin{cases} x_2 = x_3 \\ g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3 = 0; \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений. Подставим во второе уравнение вместо x_2 переменную x_3, получим:

$$g_{12}x_1x_3 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_3^2 = x_3(g_{12}x_1 + g_{13}x_1 + g_{23}x_3) = 0;$$

$$x_1(g_{12} + g_{13}) = -x_3g_{23}, \text{ или } x_1 = -\frac{g_{23}}{g_{12}+g_{13}}x_3;$$

$$A_1^*\left(-\frac{g_{23}}{g_{12}+g_{13}} : 1 : 1\right);$$

Аналогично находим координаты точек A_2^* и A_3^*.

$$A_2^*\left(1 : -\frac{g_{13}}{g_{12}+g_{23}} : 1\right); \qquad A_3^*\left(1 : 1 : -\frac{g_{12}}{g_{13}+g_{23}}\right).$$

Обозначим поляры точек A_i^* через a_i^* соответственно и найдём их уравнения в репере $\boldsymbol{R}$.

$$a_1^*: \quad g_{12}\left(x_1 + x_2\left(-\frac{g_{23}}{g_{12}+g_{13}}\right)\right) + g_{13}\left(x_1 + x_3\left(-\frac{g_{23}}{g_{12}+g_{13}}\right)\right) + g_{23}\left(x_2 + x_3\right) = 0;$$

$$x_1\left(g_{12}^2 + 2g_{12}g_{13} + g_{13}^2\right) + x_2\left(g_{12}g_{23} + g_{13}g_{23} - g_{12}g_{23}\right) + x_3\left(g_{12}g_{23} + g_{13}g_{23} - g_{13}g_{23}\right) =$$

$$= x_1\left(g_{12}+g_{13}\right)^2 + x_2 g_{13}g_{23} + x_3 g_{12}g_{23} = 0.$$

Аналогично находим уравнения поляр a_2^* и a_3^*.

$$a_2^*: \quad x_1 g_{13}g_{23} + x_2(g_{12}+g_{23})^2 + x_3 g_{13}g_{12} = 0.$$

$$a_3^*: \quad x_1 g_{12}g_{23} + x_2 g_{12}g_{13} + x_3(g_{13}+g_{23})^2 = 0.$$

Теперь вычислим координаты точек $B_i = (a_i^* \cap A_j A_k)$.

Сторона A_2A_3 треугольника $A_1A_2A_3$ имеет уравнение $x_1 = 0$. Тогда координаты точки B_1 найдём из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1(g_{12}+g_{13})^2 + x_2 g_{13}g_{23} + x_3 g_{12}g_{23} = 0; \end{cases}$$

$$B_1\left(0 : g_{12} : -g_{13}\right);$$

Аналогично находим и координаты точек B_2 и B_3:

$$B_2\left(g_{12} : 0 : -g_{23}\right); \quad B_3\left(-g_{13} : g_{23} : 0\right).$$

Вычислим определитель, составленный из координат точек B_i:

$$\begin{vmatrix} 0 & g_{12} & -g_{13} \\ g_{12} & 0 & -g_{23} \\ -g_{13} & g_{23} & 0 \end{vmatrix} = g_{12}g_{13}g_{23} - g_{12}g_{13}g_{23} = 0.$$

Т.к. наш определитель равен нулю, то следовательно точки B_i лежат на одной прямой $\boldsymbol{l}$.

Покажем уравнение прямой $\boldsymbol{l}$.

$$\boldsymbol{l}:\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & g_{12} & -g_{13} \\ g_{12} & 0 & -g_{23} \end{vmatrix} = -x_1 g_{12} g_{23} - x_2 g_{12} g_{13} - x_3 g_{12}^2 = -g_{12}(x_1 g_{23} + x_2 g_{13} + x_3 g_{12}) = 0;$$

$$\boldsymbol{l}: \qquad x_1 g_{23} + x_2 g_{13} + x_3 g_{12} = 0; \qquad (1)$$

Очевидно, что определив проективный репер при помощи соответствующих точек треугольника $A_1^* A_2^* A_3^*$, т.е $R^* = \{A_1^*, A_2^*, A_3^*, S\}$, аналогично доказывается справедливость теоремы и для прямой l^*.

Теперь приступим к доказательству второй части нашей теоремы.

Покажем уравнение прямой l^* для репера $\boldsymbol{R}$. Для этого необходимо определить точки пересечения например прямых $A_1^* A_2^*$ и $A_1^* A_3^*$ с полярами точек A_3 и A_2 соответственно и найти уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Найдём уравнение прямой $A_1^* A_2^*$:

$$A_1^* A_2^*: \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -\dfrac{g_{23}}{g_{12}+g_{13}} & 1 & 1 \\ 1 & -\dfrac{g_{13}}{g_{12}+g_{23}} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x_1\left(1 + \frac{g_{13}}{g_{12}+g_{23}}\right) + x_2\left(\frac{g_{23}}{g_{12}+g_{13}} + 1\right) + x_3\left(\frac{g_{23} g_{13}}{(g_{12}+g_{23})(g_{12}+g_{13})} - 1\right) = 0$$

Или окончательно:

$$A_1^* A_2^*: \qquad x_1(g_{12}+g_{13}) + x_2(g_{12}+g_{23}) - x_3 g_{12} = 0;$$

Уравнение поляры точки A_3 имеет вид:

$$g_{12}(x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0) + g_{13}(x_1 \cdot 1 + x_3 \cdot 0) + g_{23}(x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 1) = g_{13} x_1 + g_{23} x_2 = 0.$$

Теперь можем найти координаты точки пересечения этой поляры и прямой $A_1^* A_2^*$. Обозначим эту точку через B_3^*.

$$B_3^*: \quad \begin{cases} x_1(g_{12}+g_{13}) + x_2(g_{12}+g_{23}) - x_3 g_{12} = 0 \\ x_1 g_{13} + x_2 g_{23} = 0 \end{cases}.$$

Решая полученную систему уравнений находим:

$$B_3^*\left(1 : -\frac{g_{13}}{g_{23}} : -\frac{g_{13}-g_{23}}{g_{23}}\right).$$

Аналогично находим и координаты точки $B_2^* \equiv (a_2 \cap A_1^* A_3^*)$:

$$B_2^*\left(-\frac{g_{23}}{g_{12}} : -\frac{g_{23}-g_{12}}{g_{12}} : 1\right).$$

Уравнение прямой, проходящей через точки B_3^* и B_2^* будет иметь вид:

$$x_1(g_{12}+g_{13}-g_{23}) + x_2(g_{12}+g_{23}-g_{13}) + x_3(g_{13}+g_{23}-g_{12}) = 0 \qquad (2)$$

Теперь найдём уравнение оси перспективы для треугольников $A_1 A_2 A_3$ и $A_1^* A_2^* A_3^*$. В нашем случае осью перспективы будет являться поляра точки S. Её уравнение для репера R имеет вид:

$$x_1(g_{12}+g_{13}) + x_2(g_{12}+g_{23}) + x_3(g_{13}+g_{23}) = 0 \qquad (3)$$

Заметим, что коэффициенты при x_i уравнения (3) получаются как разность соответствующих коэффициентов уравнения (2) и уравнения (1). Т.е. определитель, составленный из коэффициентов при x_i в уравнениях (1), (2) и (3) будет равен равен нулю. Следовательно прямые l, l^* и поляра точки S пересекаются в одной точке. Назовём её точкой L.

Наша теорема доказана.

Интересно рассмотреть частный случай, когда прямые l и l^* совпадают.

В этом случае коэффициенты при x_i в уравнениях этих прямых должны быть пропорциональны, т.е. мы имеем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} g_{12}+g_{13}-g_{23} = k \cdot g_{23} \\ g_{12}+g_{23}-g_{13} = k \cdot g_{13} \\ g_{13}+g_{23}-g_{12} = k \cdot g_{12} \end{cases};$$

Сложим левые и правые части этих уравнений, получим:

$$g_{12}+g_{13}+g_{23} = k(g_{12}+g_{13}+g_{23}); \qquad \text{т.е. } k = 1.$$

Получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} g_{12} + g_{13} = 2g_{23} \\ g_{12} + g_{23} = 2g_{13} \\ g_{13} + g_{23} = 2g_{12} \end{cases}.$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим:

$$g_{13} - g_{23} = 2(g_{23} - g_{13}).$$

Это выражение будет справедливо только в том случае, если $g_{13} = g_{23}$. Но тогда получаем, что $g_{13} = g_{23} = g_{12}$. Таким образом, уравнение коники G будет иметь вид:

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 0,$$

а уравнения (1), (2) и (3)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Сделаем следующие преобразования координат: $X = \dfrac{x_1}{x_3}$, $Y = \dfrac{x_2}{x_3}$.

Рассмотрим наш случай в декартовой координатной системе XOY.

Уравнение коники G в новой координатной системе примет такой вид:

$$XY + X + Y = 0 \text{ или } Y = -\frac{X}{1+X}, \tag{4}$$

а прямые (1), (2) и (3) (мы помним, что все три прямые совпадают, а следовательно описываются одним уравнением) имеют уравнение:

$$Y = -X - 1, \tag{5}$$

Покажем, как выглядит наш случай на чертеже (Рис. 19).

Мы видим, что коника G представляет собой ни что иное, как равностороннюю гиперболу, смещённую относительно начала координат на вектор $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ и повернутую на $45°$. Ветви гиперболы будут симметричны относительно прямой $Y = X$, т.к. уравнение (4) можно записать и таким образом:

$$X = -\frac{Y}{1+Y}.$$

Уравнения асимптот будут иметь вид: $X = -1$; $Y = -1$. На Рис. 19 асимптоты показаны светлозелёным цветом, а прямая (5) – розовым.

Вершины треугольника $A_1^* A_2^* A_3^*$ (он показан синим) будут иметь координаты:

$$A_1^*\left(-\frac{1}{2};1\right),\ A_2^*\left(1;-\frac{1}{2}\right),\ A_3^*(-2;-2).$$

А координаты вершин треугольника $A_1 A_2 A_3$ (в данной системе координат он является вырожденным) соответственно будут:

$$A_1(-\infty;-1),\ A_2(-1;-\infty),\ A_3(0;0).$$

Точка S имеет координаты (1;1).

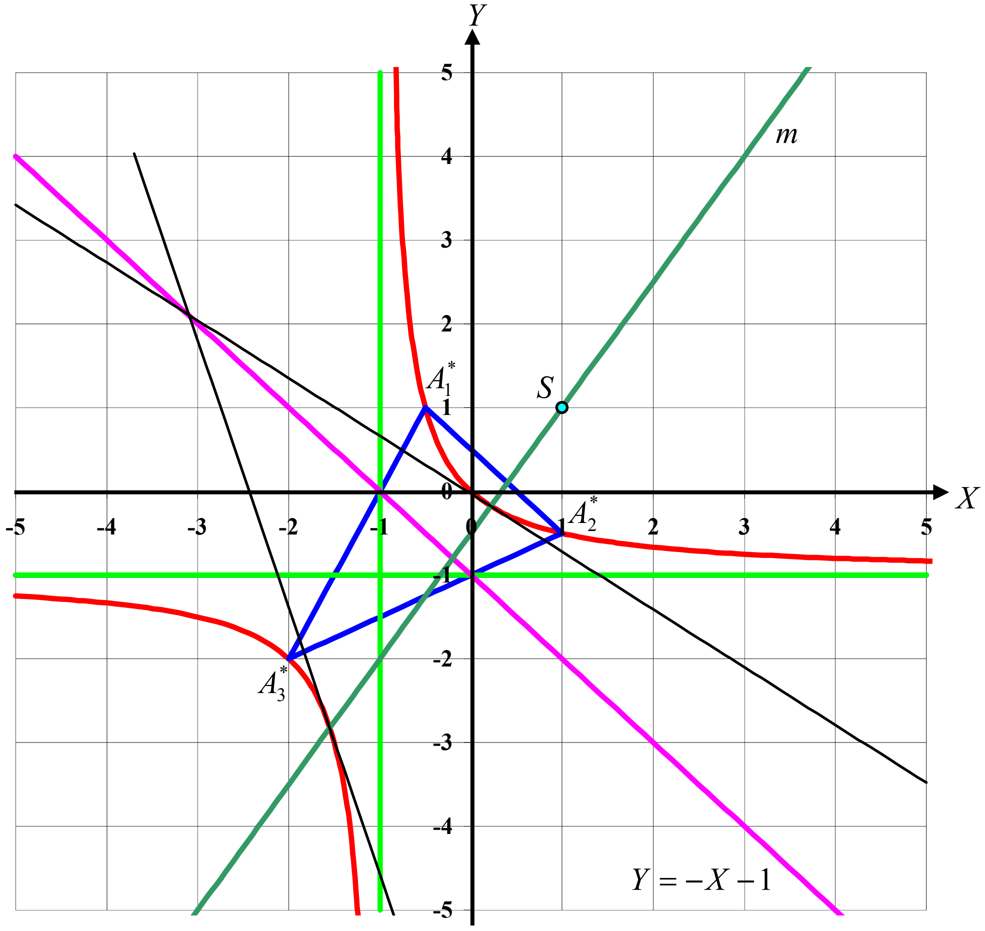

Рис. 2

Такая гипербола интересна тем, что касательные, проведённые в точках пересечения ветвей гиперболы G и прямой m, проходящей через точку S, всегда будут пересекаться на прямой (5) (пример таких касательных на Рис. 19 показан чёрным цветом).

Справедлива также двойственная

Теорема: **Если два перспективных треугольника $A_1 A_2 A_3$ и $A_1^* A_2^* A_3^*$ соответственно, вписаны в произвольную конику *G*, то прямые, проходящие через вершины A_i^* (или вершияы A_i) и полюсы сторон $A_k A_j$ (или полюсы сторон $A_k^* A_j^*$) пересекаются в одной точке *T* (или точке T^*). Причём центр перспективы *S* данных треугольников и точки *T* и T^* лежат на одной прямой.**

Точку ***T*** будем называть псевдоцентром перспективы.

Доказательство:

Выберем проективный репер $\boldsymbol{R}=\{ A_1, A_2, A_3, S \}$, где $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$, $S(1:1:1)$ рис. 20.

Обозначим через a_i поляры точек A_i , а точки пересечения данных поляр соответственно через $P_i \equiv (a_j \cap a_k)$.

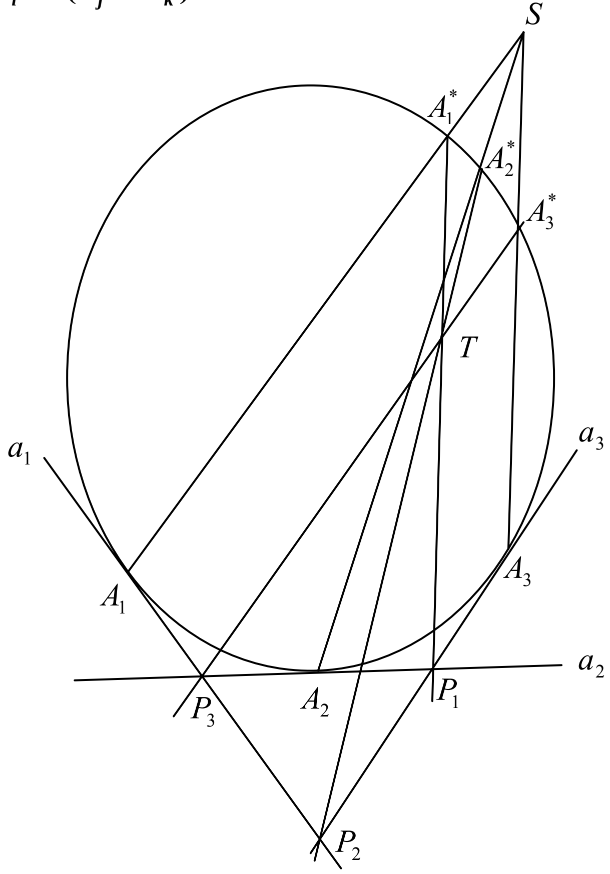

Рис. 3

Таким образом точки P_i являются полюсами прямых $A_j A_k$.

Докажем, что прямые $P_i A_i$ пересекаются в точке ***T.***

Рассмотрим треугольники $P_1\,P_2\,P_3$ и $A_1^*A_2^*A_3^*$. Как было доказано ранее точки $B_i\,\equiv(P_j\,P_k\,\cap A_j\,A_k)$ лежат на одной прямой l^*. Следовательно прямая l^* является осью перспективы этих треугольников. А по теореме Дезарга для этих треугольников должен быть и центр перспективы, т.е. прямые $P_i\,A_i$ должны пересекаться в одной точке, точке T.

Аналогично доказывается, что и прямые $P_i^*A_i^*$, пересекаются в одной точке, точке T^*, где P_i^* - полюсы прямых $A_j^*A_k^*$.

Что и требовалось доказать

Теперь докажем, что точки T, T^* и S лежат на одной прямой t.

Уравнения поляр a_i в нашем репере будут иметь вид:

$$a_i:\qquad g_{ij}x_j+g_{ik}x_k=0.$$

Найдём координаты точки P_1 из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} g_{12}x_1+g_{23}x_3=0\\ g_{13}x_1+g_{23}x_2=0\end{cases}$$

Мы имеем здесь два уравнения с тремя неизвестными, поэтому, не нарушая общности, можем положить $x_1=1$. Получаем такие координаты точки P_1:

$$P_1\left(1:-\frac{g_{13}}{g_{23}}:-\frac{g_{12}}{g_{23}}\right).$$

Аналогично находим и координаты точки P_2:

$$P_2\left(-\frac{g_{23}}{g_{13}}:1:-\frac{g_{12}}{g_{13}}\right).$$

Координаты точек A_1^* и A_2^* были вычислены ранее и соответственно равны:

$$A_1^*\left(-\frac{g_{23}}{g_{12}+g_{13}}:1:1\right);\qquad A_2^*\left(1:-\frac{g_{13}}{g_{12}+g_{23}}:1\right).$$

Можем найти уравнения прямых $A_1^*P_1$ и $A_2^*P_2$.

$$A_1^*P_1: \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -\dfrac{g_{13}}{g_{23}} & -\dfrac{g_{12}}{g_{23}} \\ -\dfrac{g_{23}}{g_{12}+g_{13}} & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_1(g_{12}^2 - g_{13}^2) - x_2 g_{13} g_{23} + x_3 g_{12} g_{23} = 0. \quad (6)$$

Аналогично:

$$A_2^*P_2: \qquad x_1 g_{13} g_{23} - x_2 (g_{12}^2 - g_{23}^2) - x_3 g_{12} g_{13} = 0. \qquad (7)$$

Рассмотрим уравнение (1) прямой ***l***.

$$l: \qquad x_1 g_{23} + x_2 g_{13} + x_3 g_{12} = 0;$$

Определим координаты полюса для данной прямой. Обозначим координаты искомого полюса через $(t_1 : t_2 : t_3)$. Искомые координаты находим из решения системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{3} g_{ij} \cdot t_i = \lambda \cdot l_j, \qquad j = \{1, 2, 3\},$$

где l_j - коэффициенты при x_j в уравнении (1). Т.е. получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} g_{11}t_1 + g_{12}t_2 + g_{13}t_3 = \lambda \cdot g_{23} \\ g_{21}t_1 + g_{22}t_2 + g_{23}t_3 = \lambda \cdot g_{13} \\ g_{31}t_1 + g_{32}t_2 + g_{33}t_3 = \lambda \cdot g_{12} \end{cases}.$$

Мы помним, что для нашей коники в выбранном репере $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 0$ и $g_{ij} = g_{ji}$. С учётом этого, решая полученную систему уравнений, находим искомые координаты полюса прямой (1):

$$\left(\frac{g_{12}^2 + g_{13}^2 - g_{23}^2}{g_{12} g_{13}} : \frac{g_{23}^2 + g_{12}^2 - g_{13}^2}{g_{12} g_{23}} : \frac{g_{13}^2 + g_{23}^2 - g_{12}^2}{g_{13} g_{23}} \right)$$

Не трудно убедиться прямым вычислением, что полученные координаты удовлетворяют прямым $A_1^*P_1$ и $A_2^*P_2$. А это означает, что точка T является полюсом прямой ***l***.

Аналогично доказывается, что и точка T^* является полюсом прямой l^*, а в силу принципа взаимности поляр и полюсов точки T, T^* и S будут лежать на одной прямой.

Что и требовалось доказать.

Теорема о двух центрах перспективы

Теорема: **Если треугольник $A_1 A_2 A_3$ вписан в произвольную конику *G*, и точки A_{ix} и A_{iy} являются проекциями вершины A_i на эту же конику, относительно двух произвольных точек *X* и *Y* соответственно, то точки пересечения прямых $A_{ix} A_{iy}$ и $A_j A_k$, коллинеарны.**

Доказательство:

Выберем проективный репер $\boldsymbol{R}=\{ A_1 , A_2 , A_3 , X \}$, где $A_1\,(1:0:0)$, $A_2\,(0:1:0)$, $A_3\,(0:0:1)$, $X(1:1:1)$ Рис. 1.

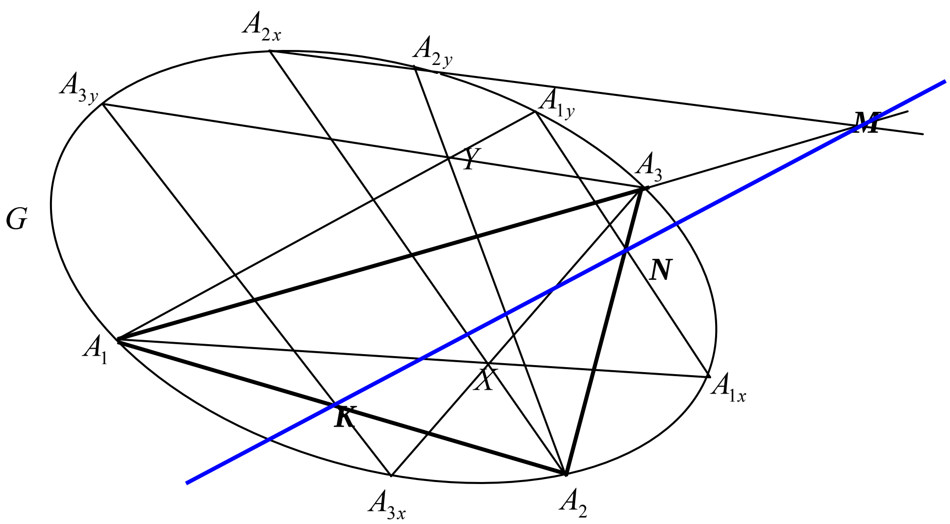

Рис. 1

Уравнение коники $\boldsymbol{G}$ в данном репере будет иметь вид:

$$\boldsymbol{G}: \qquad g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3 = 0 .$$

Нам необходимо вычислить координаты точек A_{ix} и A_{iy}. Найдём уравнения прямых $A_i X$.

Для прямой $A_1 X$ будем иметь: $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_3 - x_2 = 0 .$

Тогда координаты точки $A_{1x} \equiv (A_1 X \cap G)$ находим из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_3 - x_2 = 0 \\ g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3 = 0 \end{cases}$$

Подставим x_2 во второе уравнение вместо x_3, получим:

$$g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_2 + g_{23}x_2^2 = 0; \qquad x_1(g_{12} + g_{13}) + g_{23}x_2 = 0.$$

Откуда находим координаты точки A_{1x}: $x_2 = 1;\ \ x_3 = 1;\ \ x_1 = -\dfrac{g_{23}}{g_{12} + g_{13}}$,

или
$$A_{1x}\left(-\frac{g_{23}}{g_{12} + g_{13}} : 1 : 1\right)$$

Аналогично находим координаты точек A_{2x} и A_{3x}:

$$A_{2x}\left(1 : -\frac{g_{13}}{g_{12} + g_{23}} : 1\right) \qquad A_{3x}\left(1 : 1 : -\frac{g_{12}}{g_{13} + g_{23}}\right)$$

По условию теоремы точка Y является произвольной, поэтому мы возьмём её координаты в виде произвольных чисел: $Y(1 : a : b)$

Вычислим с учётом этого координаты точек A_{iy}.

Найдём уравнение прямой A_1Y.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = a \cdot x_3 - b \cdot x_2 = 0$$

Координаты точки $A_{1y} \equiv (A_1Y \cap G)$ находим из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot x_3 - b \cdot x_2 = 0 \\ g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3 = 0 \end{cases}.$$

$x_3 = \dfrac{b \cdot x_2}{a}$. Подставим x_3 во второе уравнение нашей системы, получим:

$$g_{12}x_1x_2 + g_{13}\frac{b}{a}x_1x_2 + g_{23}\frac{b}{a}x_2^2 = 0; \quad x_1\left(g_{12} + \frac{b}{a}g_{13}\right) + x_2\frac{b}{a}g_{23} = 0.$$

Не нарушая общности возьмём $x_2 = 1$.

Откуда находим: $$A_{1y}\left(-\frac{b\cdot g_{23}}{a\cdot g_{12}+b\cdot g_{13}}:1:\frac{b}{a}\right)$$

Аналогично находим координаты и двух других точек:

$$A_{2y}\left(\frac{1}{b}:-\frac{g_{13}}{g_{12}+b\cdot g_{23}}:1\right);\ A_{3y}\left(1:a:-\frac{a\cdot g_{12}}{g_{13}+a\cdot g_{23}}\right).$$

Введём обозначения (Рис. 1):

$$K\equiv(A_1A_2\cap A_{3x}A_{3y}),\ N\equiv(A_2A_3\cap A_{1x}A_{1y}),\ M\equiv(A_1A_3\cap A_{2x}A_{2y}).$$

Для доказательства теоремы нам необходимо показать, что точки K, N и M коллинеарны, т.е. лежат на одной прямой. Вычислим координаты этих точек, но для этого предварительно найдём уравнения прямых $A_{ix}A_{iy}$ и A_jA_k.

$$A_{1x}A_{1y}:\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ -\dfrac{g_{23}}{g_{12}+g_{13}} & 1 & 1\\ -\dfrac{b\cdot g_{23}}{a\cdot g_{12}+b\cdot g_{13}} & 1 & \dfrac{b}{a}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{b}{a}\cdot x_1-\frac{b\cdot g_{23}}{a\cdot g_{12}+b\cdot g_{13}}\cdot x_2-\frac{g_{23}}{g_{12}+g_{13}}\cdot x_3+\frac{b\cdot g_{23}}{a\cdot g_{12}+b\cdot g_{13}}\cdot x_3-x_1+\frac{b\cdot g_{23}}{a\cdot(g_{12}+g_{13})}\cdot x_2=$$

$$=\left(\frac{b}{a}-1\right)\cdot x_1+\frac{b\cdot g_{23}g_{13}(b-a)}{a\cdot(g_{12}+g_{13})\cdot(a\cdot g_{12}+b\cdot g_{13})}\cdot x_2+\frac{g_{23}g_{12}(b-a)}{(g_{12}+g_{13})\cdot(a\cdot g_{12}+b\cdot g_{13})}\cdot x_3=0$$

В силу, выбранного нами, проективного репера уравнение прямой A_2A_3 будет иметь вид: $x_1=0.$ Решив систему уравнений:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{b}{a}-1\right)\cdot x_1+\dfrac{b\cdot g_{23}g_{13}(b-a)}{a\cdot(g_{12}+g_{13})\cdot(a\cdot g_{12}+b\cdot g_{13})}\cdot x_2+\dfrac{g_{23}g_{12}(b-a)}{(g_{12}+g_{13})\cdot(a\cdot g_{12}+b\cdot g_{13})}\cdot x_3=0\\ x_1=0\end{cases}$$

находим координаты точки N.

$$N(0:a\cdot g_{12}:-b\cdot g_{13})$$

Аналогично вычисляются и координаты других двух точек:

$$K(-g_{13} : a \cdot g_{23} : 0),\ M(-g_{12} : 0 : b \cdot g_{23}).$$

Чтобы убедиться, что точки ***K***, ***N*** и ***M*** лежат на одной прямой, вычислим определитель, составленный из координат данных точек.

$$\begin{vmatrix} -g_{13} & a \cdot g_{23} & 0 \\ 0 & a \cdot g_{12} & -b \cdot g_{13} \\ -g_{12} & 0 & b \cdot g_{23} \end{vmatrix} = -a \cdot b \cdot g_{13} g_{12} g_{23} + a \cdot b \cdot g_{12} g_{23} g_{13} = 0$$

Мы убедились, что полученный определитель равен нулю, следовательно, точки ***K***, ***N*** и ***M*** лежат на одной прямой.

Теорема доказана.

Рассмотрим

частный случай: если одна из точек перспективы, например *Y*, принадлежит конике *G*, то вторая точка перспективы - *X* будет принадлежать прямой *KM*.

Доказательство:

Подставим $x_1 = 1$ и $x_3 = b$ в уравнение нашей коники, получим значение второй координаты точки ***Y***.

$$g_{12} x_2 + g_{13} b + g_{23} b x_2 = 0; \quad \text{откуда:} \quad x_2 = a = -\frac{b g_{13}}{g_{12} + g_{23} b}$$

Теперь найдём уравнение прямой ***KM***.

$$KM: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -g_{13} & -\dfrac{b g_{13} g_{23}}{g_{12} + b g_{23}} & 0 \\ -g_{12} & 0 & b g_{23} \end{vmatrix} = -\frac{b^2 g_{13} g_{23}^2}{g_{12} + b g_{23}} x_1 - \frac{b g_{12} g_{13} g_{23}}{g_{12} + b g_{23}} x_3 + b g_{13} g_{23} x_2 = 0$$

или

$$b g_{23} x_1 - (g_{12} + b g_{23}) x_2 + g_{12} x_3 = 0$$

Мы помним что точка ***X*** имеет координаты: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Подставив эти значения в уравнение прямой ***KM***, не трудно убедиться, что точка ***X*** ей принадлежит.

Что и требовалось доказать.

Следствие (теорема Паскаля): если шестиугольник вписан в произвольную конику, то точки пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой.

Доказательство:

Для удобства и наглядности введём следующие обозначения для вершин нашего шестиугольника: $\boldsymbol{Y A_{1x} A_1 A_2 A_3 A_{3x}}$ (Рис. 2).

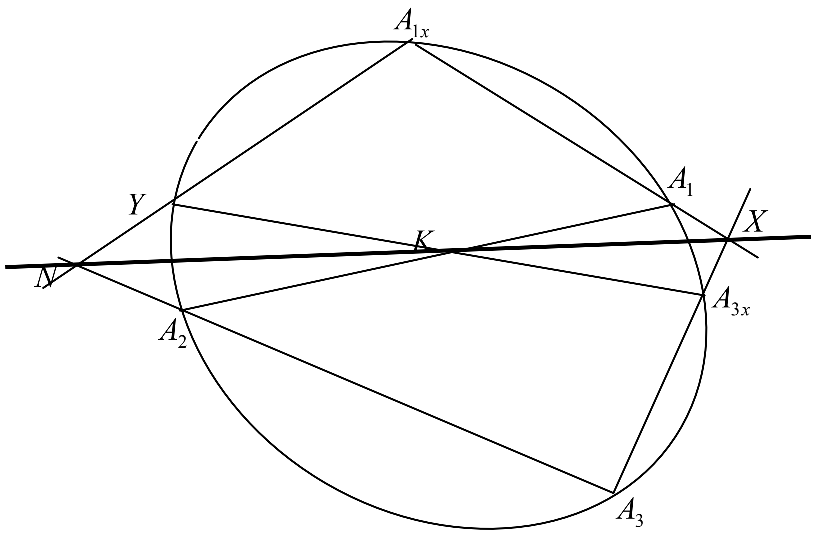

Рис. 2

Введём обозначения для точек пересечения противоположных сторон данного шестиугольника:

$$\boldsymbol{N \equiv (YA_{1x} \cap A_2 A_3)}\,; \quad \boldsymbol{K \equiv (YA_{3x} \cap A_2 A_1)}\,; \quad \boldsymbol{X \equiv (A_1 A_{1x} \cap A_{3x} A_3)}\,.$$

Рассматривая конфигурацию на Рис. 2 с точки зрения частного случая нашей теоремы, становится очевидным, что точки $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{X}$ лежат на одной прямой.

Что и требовалось доказать.

Справедлива также двойственная

Теорема: **Если треугольник $\boldsymbol{A_1 A_2 A_3}$ вписан в произвольную конику $\boldsymbol{G}$, и точки $\boldsymbol{A_{ix}}$ и $\boldsymbol{A_{iy}}$ являются проекциями вершины $\boldsymbol{A_i}$ на эту же конику, относительно двух проихвольных точек $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ соответственно, то прямые, проходящие через точки $\boldsymbol{B_k \equiv (A_{ix} A_{iy} \cap A_{jx} A_{jy})}$ и вершины треугольника $\boldsymbol{A_k}$ конкурентны.**

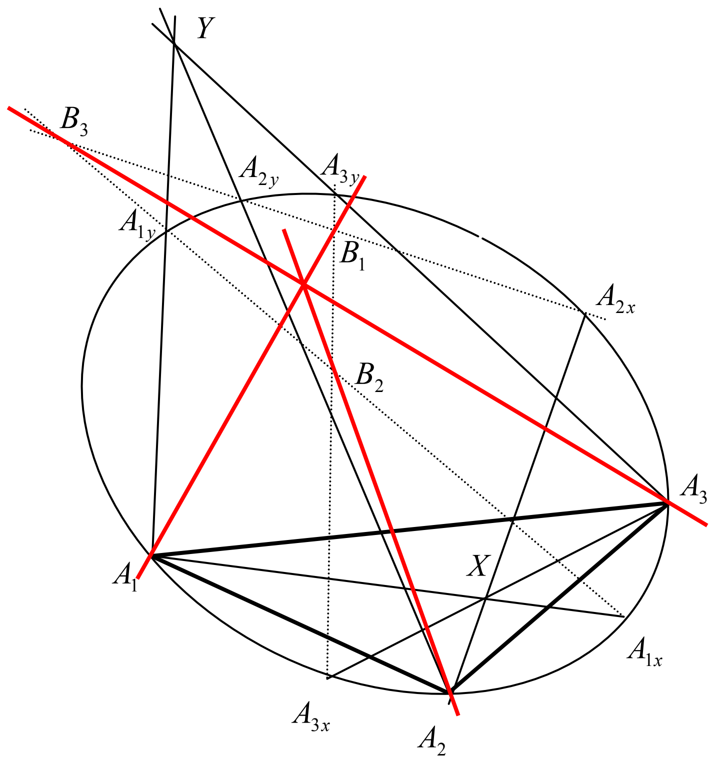

Рис. 3

Всё вышеизложенное позволяет сформулировать обобщённую теорему «о двух центрах перспективы»:

Теорема: **Если треугольник $A_1 A_2 A_3$ вписан в произвольную конику G, и точки A_{ix} и A_{iy} являются проекциями вершины A_i на эту же конику, относительно двух проихвольных точек X и Y соответственно, то точки $B_k \equiv (A_{ix}A_{iy} \cap A_{jx}A_{jy})$ образуют треугольник, перспективный данному.**

Т.е. для треугольников $A_1 A_2 A_3$ и $B_1 B_2 B_3$ имеем такое соответствие сторон:

$$A_1 A_2 \Leftrightarrow A_{3x}A_{3y}; \quad A_1 A_3 \Leftrightarrow A_{2x}A_{2y}; \quad A_2 A_3 \Leftrightarrow A_{1x}A_{1y}.$$

Покажем простейшие конфигурации для прямой и обратной теоремы.

Простейшая конфигурация прямой теоремы

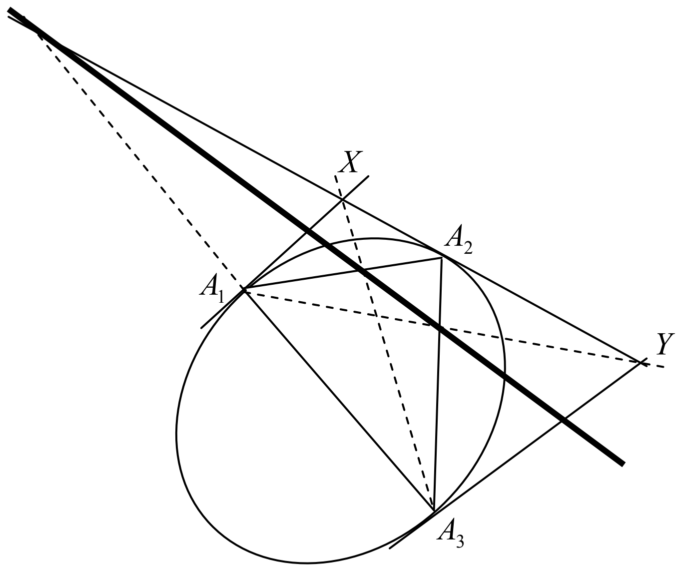

Рис. 4

Простейшая конфигурация обратной теоремы

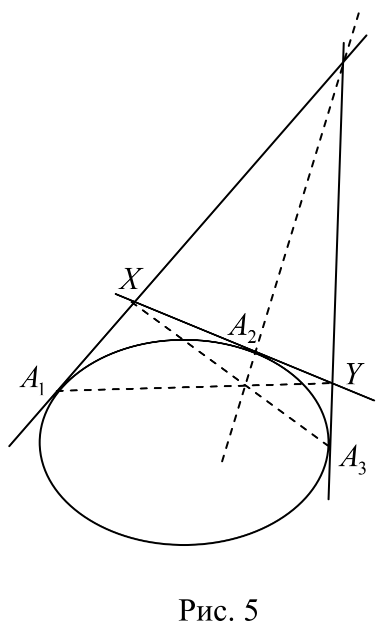

Рис. 5

Теорема о прямых Дезарга

Рассмотрим два 3-пучка прямых: $(\boldsymbol{a_i}) = (\boldsymbol{a_1};\boldsymbol{a_2};\boldsymbol{a_3})$ и $(\boldsymbol{b_j}) = (\boldsymbol{b_1};\boldsymbol{b_2};\boldsymbol{b_3})$ (Рис. 1). Обозначим точки пересечения данных пучков через $\boldsymbol{C_{ij}} \equiv \boldsymbol{a_i} \cap \boldsymbol{b_j}$

Мы будем называть треугольник вписанным в пересечение двух пучков $(\boldsymbol{a_i})$ и $(\boldsymbol{b_j})$, если его вершинами являются точки $\boldsymbol{C_{ij}}$, но ни одна из сторон не принадлежит прямым $\boldsymbol{a_i}$ и $\boldsymbol{b_j}$.

Например, треугольники $\boldsymbol{C_{11}C_{22}C_{33}}$ и $\boldsymbol{C_{31}C_{12}C_{23}}$ (Рис. 1) являются вписанными в пересечение данных пучков.

Справедлива следующая

Теорема: **Прямые Дезарга любой пары треугольников, вписанных в пересечение двух пучков и не имеющих общих вершин, пересекаются в одной и той же точке $\boldsymbol{S}$. Причём:**

1. **если $\boldsymbol{T}$ - точка пересечения диагоналей четырёхугольника $\boldsymbol{C_{11}C_{31}C_{33}C_{13}}$, то точки $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{C_{22}}$ лежат на одной прямой $\boldsymbol{s}$**
2. **если точка $\boldsymbol{Z \equiv s \cap AB}$, то сложное отношение четырёх точек $\boldsymbol{(ZS,TC_{22}) = -2}$**

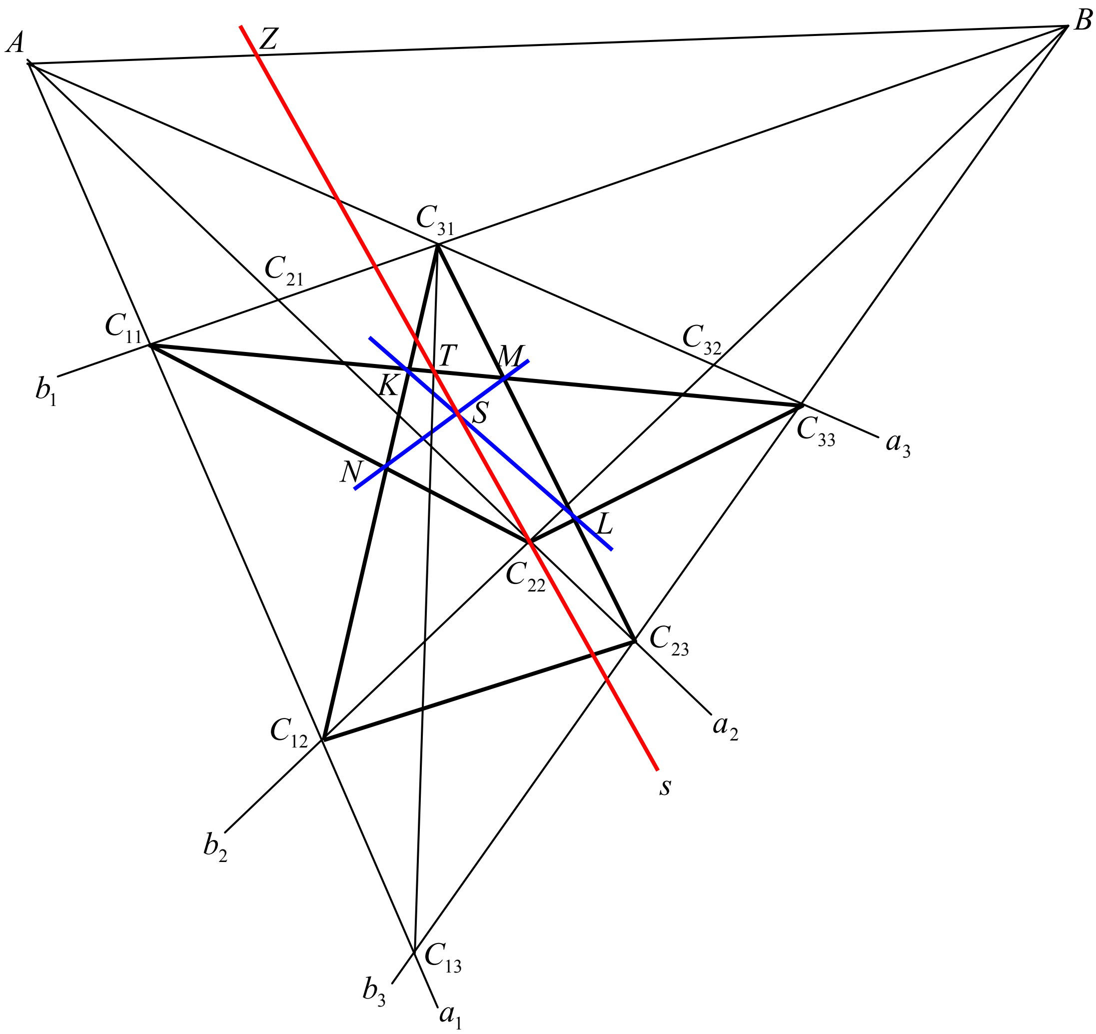

Рис. 1

Очевидно, что всего существует шесть пар вписанных треугольников, соответствующих сформулированной выше теореме. Каждая пара треугольников определяет две прямые Дезарга, т. к. наши треугольники перспективны относительно двух центров перспективы: точка $\boldsymbol{A}$ и точка $\boldsymbol{B}$. Следовательно, в точке $\boldsymbol{S}$ должно пересекаться двенадцать прямых Дезарга.

Для доказательства теоремы нам потребуется вычислять координаты точек и коэффициенты прямых, поэтому необходимо ввести некоторые общие обозначения.

Уравнение прямой на проективной плоскости имеет вид:

$$\boldsymbol{u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0} \qquad (1)$$

Другими словами, можно сказать, что точка $\boldsymbol{X(x_1 : x_2 : x_3)}$ лежит на прямой $\boldsymbol{u(u_1 : u_2 : u_3)}$. Две точки $\boldsymbol{M(m_1 : m_2 : m_3)}$ и $\boldsymbol{N(n_1 : n_2 : n_3)}$ определяют прямую $\boldsymbol{MN \equiv u(u_1 : u_2 : u_3)}$, где

$$\boldsymbol{u_1 = \begin{vmatrix} m_2 & m_3 \\ n_2 & n_3 \end{vmatrix}; \qquad u_2 = \begin{vmatrix} m_3 & m_1 \\ n_3 & n_1 \end{vmatrix}; \qquad u_3 = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix}.} \qquad (2)$$

Аналогично, две прямые $\boldsymbol{m(m_1 : m_2 : m_3)}$ и $\boldsymbol{n(n_1 : n_2 : n_3)}$ пересекаются в точке $\boldsymbol{m \cap n \equiv U(u_1 : u_2 : u_3)}$, где координаты u_i также определяются выражениями (2).

Теперь приступим к доказательству теоремы.

Доказательство:

Рассмотрим конфигурацию прямых и точек на Рис. 1 в проективном репере $\{\boldsymbol{A; C_{13}; B; C_{31}}\}$, где $\boldsymbol{A(1:0:0)}$, $\boldsymbol{C_{13}(0:1:0)}$, $\boldsymbol{B(0:0:1)}$, $\boldsymbol{C_{31}(1:1:1)}$.

Пусть точка $\boldsymbol{C_{22}}$ имеет координаты $\boldsymbol{(1:m:n)}$. Не трудно вычислить координаты остальных точек $\boldsymbol{C_{ij}}$.

$$\boldsymbol{AC_{13} \cap BC_{31} \equiv C_{11}(x_1 : x_2 : x_3)}.$$

Вычислим коэффициенты прямых $\boldsymbol{AC_{13}}$ и $\boldsymbol{BC_{31}}$. Для $\boldsymbol{AC_{13}}$ имеем:

$$\boldsymbol{u_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \qquad u_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \qquad u_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.}$$

т. е. $\boldsymbol{AC_{13}(0:0:1)}$.

Для $\boldsymbol{BC_{31}}$:

$$\boldsymbol{u_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad u_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad u_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.}$$

$$BC_{31}(-1:1:0)$$

Теперь находим координаты точки $C_{11}(x_1 : x_2 : x_3)$.

$$x_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1; \quad x_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Т. е. можем записать $C_{11}(1:1:0)$, т. к. однородные координаты x_i имеют значения с точностью до общего множителя $t \neq 0$.

Аналогично находим координаты и остальных точек C_{ij}.

$$C_{21}(m:m:n); \quad C_{12}(1:m:0); \quad C_{32}(1:m:m); \quad C_{23}(0:m:n); \quad C_{33}(0:1:1).$$

Найдём коэффициенты прямых $C_{11}C_{33}$ и $C_{31}C_{13}$.
Для $C_{11}C_{33}$ имеем:

$$u_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad u_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad u_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

или

$$C_{11}C_{33}(1:-1:1)$$

Для $C_{31}C_{13}$ имеем:

$$u_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad u_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad u_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

или

$$C_{31}C_{13}(1:0:-1).$$

Теперь можем вычислить координаты точки $T \equiv C_{11}C_{33} \cap C_{31}C_{13}$.

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

или

$$T(1:2:1).$$

Координаты точек T и C_{22} известны и мы можем найти коэффициенты прямой TC_{22}, именно на этой прямой должна лежать точка S.

Для $TC_{22}(u_1 : u_2 : u_3)$ имеем:

$$u_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m & n \end{vmatrix} = 2n - m; \qquad u_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ n & 1 \end{vmatrix} = 1 - n; \;\; u_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 2.$$

$$TC_{22} \equiv s \equiv (2n - m : 1 - n : m - 2).$$

Рассмотрим два треугольника, вписанных в пересечение данных пучков, $C_{11}C_{33}C_{22}$ и $C_{12}C_{31}C_{23}$.

Определим для данных треугольников прямые Дезарга относительно центра перспективы A и относительно центра перспективы B.

Точки $K \equiv C_{12}C_{31} \cap C_{11}C_{33}$ и $L \equiv C_{22}C_{33} \cap C_{23}C_{31}$ определяют прямую Дезарга KL для данных треугольников, относительно центра перспективы A.

Прямая $C_{12}C_{31}$ имеет коэффициенты:

$$u_1 = \begin{vmatrix} m & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m; \quad u_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad u_3 = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m,$$

$$C_{12}C_{31}(m : -1 : 1 - m).$$

Коэффициенты прямой $C_{11}C_{33}$ известны, можем вычислить координаты точки K.

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1-m \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -m; \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1-m & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2m; \;\; x_3 = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - m,$$

$$K(m : 2m - 1 : m - 1).$$

Вычислим коэффициенты прямых $C_{22}C_{33}$ и $C_{23}C_{31}$.

Для $C_{22}C_{33}$ получаем:

$$u_1 = \begin{vmatrix} m & n \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - n; \qquad u_2 = \begin{vmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad u_3 = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{22}C_{33}(m - n : -1 : 1);$$

для $C_{23}C_{31}$ получаем:

$$u_1 = \begin{vmatrix} m & n \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - n; \qquad u_2 = \begin{vmatrix} n & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = n; \quad u_3 = \begin{vmatrix} 0 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -m,$$

$$C_{23}C_{31}(m - n : n : -m).$$

Находим координаты точки $\boldsymbol{L}$.

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ n & -m \end{vmatrix} = m - n; \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & m-n \\ -m & m-n \end{vmatrix} = (m-n)(m+1);$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} m-n & -1 \\ m-n & n \end{vmatrix} = (m-n)(n+1),$$

$$L(1 : m+1 : n+1).$$

Вычислим коэффициенты для прямой Дезарга $\boldsymbol{KL}$.

$$u_1 = \begin{vmatrix} 2m-1 & m-1 \\ m+1 & n+1 \end{vmatrix} = 2m + 2mn - n - m^2; \qquad u_2 = \begin{vmatrix} m-1 & m \\ n+1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - mn;$$

$$u_3 = \begin{vmatrix} m & 2m-1 \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - m + 1,$$

$$KL(2m + 2mn - n - m^2 : -1 - mn : m^2 - m + 1).$$

Теперь можем вычислить координаты точки $S \equiv TC_{22} \cap KL$.

$$x_1 = \begin{vmatrix} n-1 & m-2 \\ -1-mn & m^2 - m + 1 \end{vmatrix} = (m+1)(m-n-1);$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} -2 & 2n-m \\ m^2 - m + 1 & 2m + 2mn - n - m^2 \end{vmatrix} = 3m(m-n-1);$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 2n-m & 1-n \\ 2m + 2mn - n - m^2 & -1-mn \end{vmatrix} = (n+m)(m-n-1),$$

$$S(m+1 : 3m : n+m).$$

Убедимся, что прямая Дезарга, рассматриваемых треугольников, относительно центра перспективы $\boldsymbol{B}$ проходит через точку $\boldsymbol{S}$.

Введём обозначения: $M \equiv C_{11}C_{33} \cap C_{31}C_{23}$, $N \equiv C_{11}C_{22} \cap C_{31}C_{12}$.
Тогда прямая $\boldsymbol{MN}$ будет прямой Дезарга, рассматриваемых треугольников, относительно центра перспективы $\boldsymbol{B}$.

Мы уже вычислили коэффициенты прямых

$$C_{11}C_{33}(1 : -1 : 1), \quad C_{23}C_{31}(m-n : n : -m), \quad \text{и} \quad C_{12}C_{31}(m : -1 : 1-m).$$

Определим коэффициенты прямой $\boldsymbol{C_{11}C_{22}}$.

$$u_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{vmatrix} = n; \quad u_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ n & 1 \end{vmatrix} = -n; \quad u_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m-1,$$

$$C_{11}C_{22}(n : -n : m-1).$$

Вычислим координаты точек $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$.

Для $\boldsymbol{M}$ будем иметь:

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ n & -m \end{vmatrix} = m-n; \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -m & m-n \end{vmatrix} = 2m-n; \quad x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m-n & n \end{vmatrix} = m,$$

$$M(m-n : 2m-n : m).$$

Для $\boldsymbol{N}$:

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1-m \\ -n & m-1 \end{vmatrix} = (1-m)(1+n);$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} 1-m & m \\ m-1 & n \end{vmatrix} = (1-m)(m+n);$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} m & -1 \\ n & -n \end{vmatrix} = (1-m)n,$$

$$N(1+n : m+n : n).$$

Зная координаты точек $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{S}$, не трудно убедиться, что все они лежат на одной прямой. Вычислим определитель, составленный из координат этих точек.

$$\begin{vmatrix} m-n & 2m-n & m \\ 1+n & m+n & n \\ m+1 & 3m & n+m \end{vmatrix} = (m-n)(m+n)^2 + n(m+1)(2m-n) + 3m^2(1+n) -$$

$$-m(m+1)(m+n) - 3mn(m-n) - (1+n)(2m-n)(n+m) = 0.$$

Как видим, данный определитель равен нулю. Следовательно, точки $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{S}$ лежат на одной прямой.

Аналогичными вычислениями доказывается, что и остальные десять прямых Дезарга проходят через точку $\boldsymbol{S}$.

Нам осталось вычислить сложное отношение четырёх точек (ZS, TC_{22}). Координаты трёх точек известны. Необходимо вычислить координаты точки $Z \equiv AB \cap s$.

Вычислим предварительно коэффициенты прямой $\boldsymbol{AB}$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \qquad \boldsymbol{u}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\boldsymbol{AB}(0:1:0).$$

Тогда для точки $\boldsymbol{Z}$ будем иметь:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1-\boldsymbol{n} & \boldsymbol{m}-2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{m}-2;$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{m}-2 & 2\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m} \end{vmatrix} = 0;$$

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m} & 1-\boldsymbol{n} \end{vmatrix} = \boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}.$$

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{m}-2:0:\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}).$$

Вычислим сложное отношение $(\boldsymbol{ZS},\boldsymbol{TC}_{22})$.

$$(\boldsymbol{ZS},\boldsymbol{TC}_{22}) = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{m-2} & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{m+1} & 1 \\ \mathbf{3m} & \mathbf{m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{m-2} & 1 \\ 0 & \mathbf{m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{m+1} & 1 \\ \mathbf{3m} & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2(\boldsymbol{m}-2)(\boldsymbol{m}^2-2\boldsymbol{m})}{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{m}-2)(2-\boldsymbol{m})} = -2.$$

Таким образом, все пункты нашей теоремы доказаны.

Теорема о точке, прямой и треугольнике

Как известно, тремя основными понятиями и объектами как в планиметрии, так и в проективной геометрии являются точка, прямая и треугольник.

Для произвольной точки, произвольной прямой и произвольного треугольника справедлива следующая

Теорема: **Если точки B_i являются проекциями вершин A_i треугольника $A_1A_2A_3$ на противоположные стороны A_jA_k относительно произвольной точки P и произвольная прямая f пересекает стороны A_jA_k в точках C_i соответственно, то точки пересечения прямых B_iB_j и прямых A_kC_k лежат на одной прямой t.**

Сделаем чертёж.

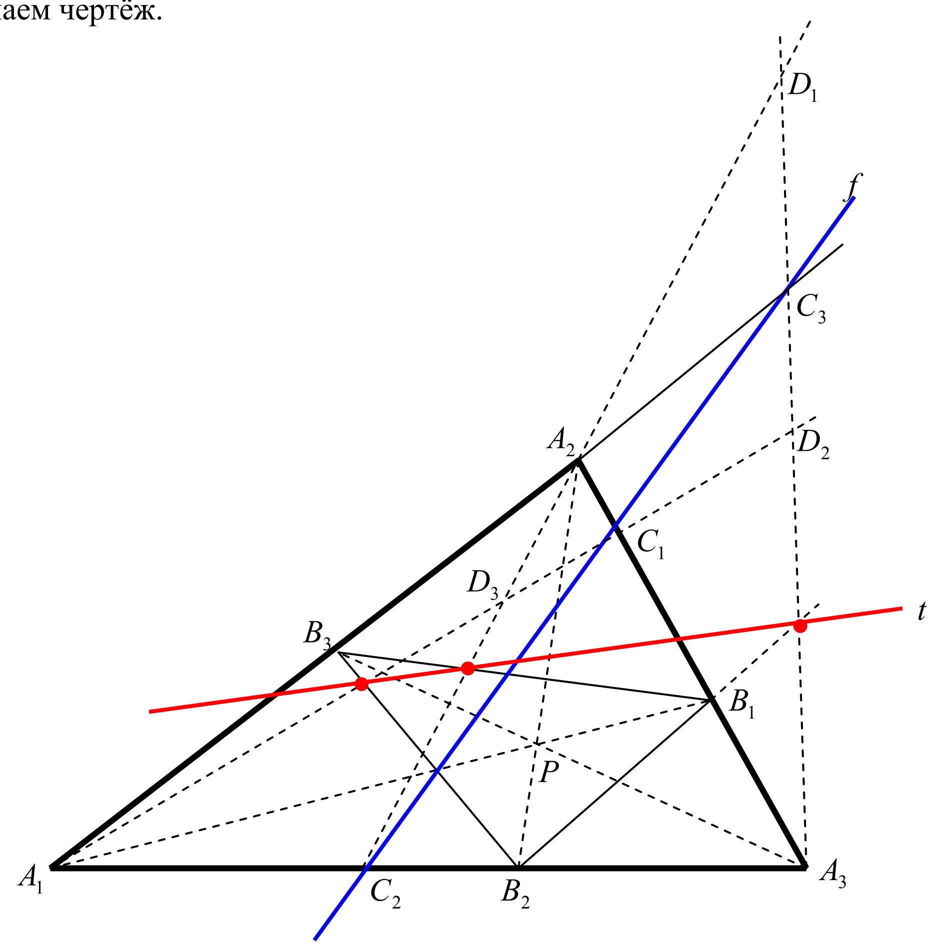

Рис. 1

Доказательство:

Рассмотрим треугольник $D_1D_2D_3$, где $D_i \equiv A_jC_j \cap A_kC_k$, и треугольник $A_1A_2A_3$.

Здесь $\boldsymbol{A_i A_j} \cap \boldsymbol{D_i D_j} \equiv \boldsymbol{C_k}$ и $\boldsymbol{C_k} \in \boldsymbol{f}$ по условию теоремы. Следовательно, по теореме Дезарга, прямые $\boldsymbol{A_i D_i}$ конкурентны.

Напомним, что треугольник называется вписанным в другой треугольник, если каждой стороне последнего принадлежит строго одна вершина первого. Таким образом, для каждой вершины последнего треугольника существует противолежащая вершина первого треугольника.

Треугольник $\boldsymbol{A_1 A_2 A_3}$ вписан в треугольник $\boldsymbol{D_1 D_2 D_3}$ и их противолежащие вершины конкурентны, как было доказано выше. Треугольник $\boldsymbol{B_1 B_2 B_3}$ вписан в треугольник $\boldsymbol{A_1 A_2 A_3}$ и прямые $\boldsymbol{A_i B_i}$ конкурентны в точке $\boldsymbol{P}$ по условию теоремы. Известно, что свойство конкурентности прямых, проходящих через противолежащие вершины вписанного и описанного треугольников, обладают свойством транзитивности. Т.е. прямые $\boldsymbol{D_i B_i}$ будут конкурентны. И, следовательно, по теореме Дезарга, прямые $\boldsymbol{B_i B_j}$ и прямые $\boldsymbol{D_i D_j}$ будут пересекаться в точках, лежащих на одной прямой . Но $\boldsymbol{D_i D_j} \equiv \boldsymbol{A_k C_k}$, следовательно, прямые $\boldsymbol{B_i B_j}$ и $\boldsymbol{A_k C_k}$ пересекаются в точках, лежащих на одной прямой ***t***.

Что и требовалось доказать.

Многие теоремы проективной геометрии имеют интересные частные случаи и следствия для планиметрии.

Рассмотрим один из них.

Введём обозначения для треугольников $\boldsymbol{A_1 A_2 A_3} : \Delta(\boldsymbol{A})$ и $\boldsymbol{B_1 B_2 B_3} : \Delta(\boldsymbol{B})$. Тогда на языке преобразований трансформацию прямой ***f*** в прямую ***t*** можно записать таким образом:

$$\boldsymbol{f} \xrightarrow{\Delta(A),P} \boldsymbol{t}$$

Если прямая ***f*** проходит через центр окружности, описанной около треугольника $\Delta(\boldsymbol{A})$ и $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{f}$, то $\boldsymbol{f} \xrightarrow{\Delta(A),P} \boldsymbol{t} \xrightarrow{\Delta(B),P} \boldsymbol{f}$, где $\Delta(\boldsymbol{B}) \xleftarrow{\nabla,P} \Delta(\boldsymbol{A})$, (здесь символ $\nabla, \boldsymbol{P}$ обозначает проективное соответствие относительно точки ***P***). Т.е. вторая трансформация прямую ***t*** снова переводит в прямую ***f***.

Теорема о вписанных четырёхугольниках

Теорема: **Если два четырёхугольника, вписанных в общую конику, имеют общую точку *O* - пересечения диагоналей, то прямые, то прямые, проходящие через противоположные вершины восьмиугольника, образованного последовательным пересечением сторон данных четырёхугольников, конкурентны в точке *O*.**

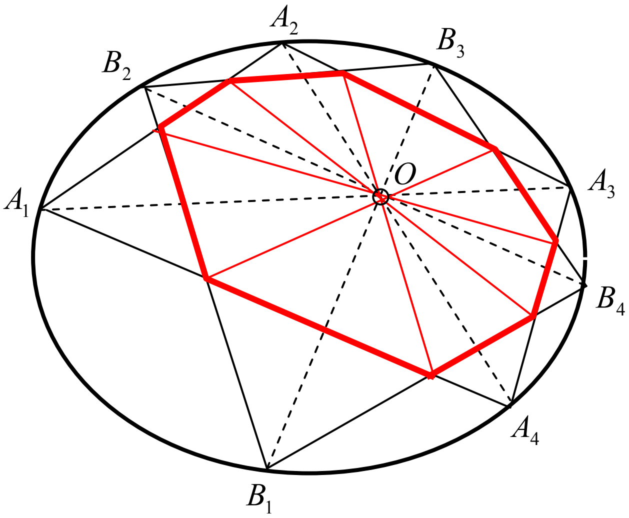

Рис. 1

Доказательство:

Рассмотрим шестиугольник $\boldsymbol{B_1 B_2 A_3 A_1 A_4 B_3}$ Рис. 2.

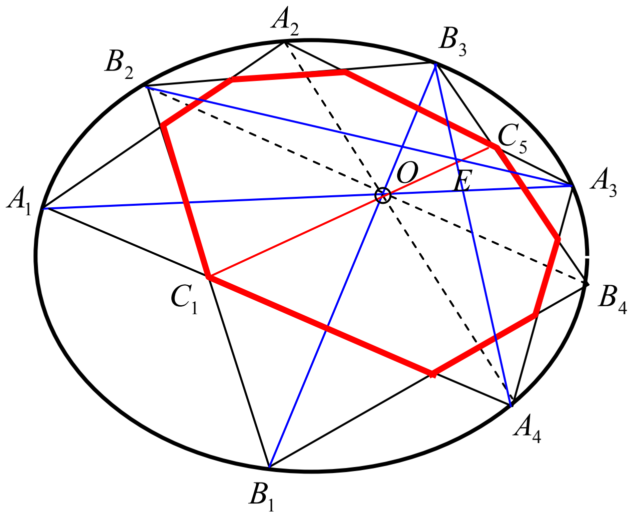

Рис. 2

Определим точки пересечений его противоположных сторон.

$$\boldsymbol{B_1 B_2 \cap A_1 A_4 \equiv C_1}\,;\ \boldsymbol{B_2 A_3 \cap A_4 B_3 \equiv E}\,;\ \ \boldsymbol{A_3 A_1 \cap B_3 B_1 \equiv O}\,.$$

По теореме Паскаля точки $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{O}$ лежат на одной прямой.

Рассмотрим ещё один шестиугольник $A_4A_2A_3B_2B_4B_3$ и найдём точки пересечений его противоположных сторон.

$$A_1A_2 \cap B_2B_4 \equiv O; \;\; A_2A_3 \cap B_4B_3 \equiv C_5; \; A_3B_2 \cap B_3A_4 \equiv E \;.$$

Т.е. точки O, C_5 и E лежат также на одной прямой Паскаля. Отсюда заключаем, что и точки C_1, O и C_5 принадлежат одной прямой. Но точки C_1 и C_5 являются противоположными вершинами, интересующего нас восьмиугольника.

Аналогично доказывается, что и другие прямые, проходящие через противоположные вершины полученного восьмиугольника, также проходят через точку O.

Что и требовалось доказать.