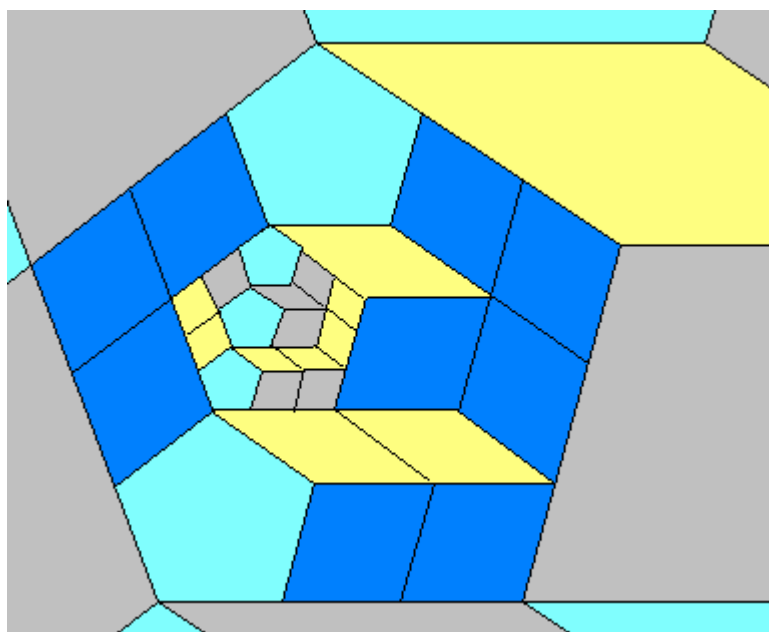


Франц Герман

**Квазикристаллическая фрактальная мозаика
ПЛОСКОСТИ**

(www.franz-hermann.com)



2009

"Насколько мне известно, новых типов мозаик больше никто не открывал..."

Мартин Гарднер

Темой нашего исследования будут правильные многоугольники.

Известно, что любой правильный n - угольник с чётным числом сторон, т.е. квадрат, шестиугольник и т.д., можно замостить (т.е. выложить на его площади мозаику) Z_q ромбами (см., например, книгу У. Болл, Г. С. М. Коксетер «Математические эссе и развлечения»), где

$$Z_q = \frac{(n-1)^2 - 1}{8}. \quad (1)$$

Например:

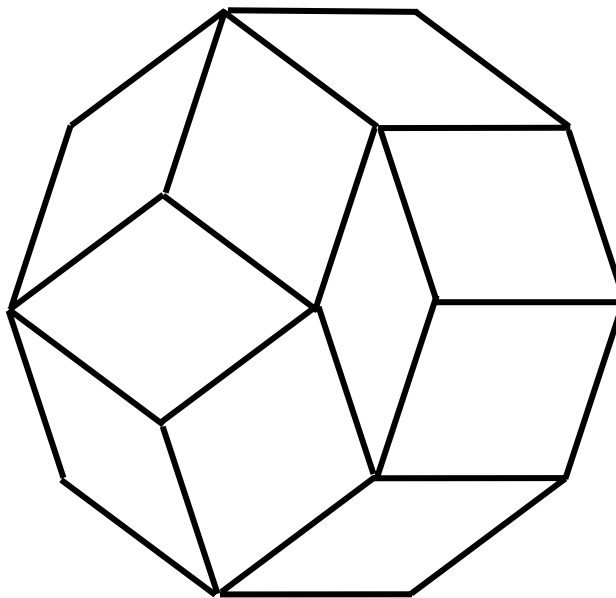


Рис. 1

Здесь $n = 10$ и $Z_q = \frac{(10-1)^2 - 1}{8}$ т.е. **10** ромбов умещаются на площади правильного 10-угольника.

Заметим, что формула (1) даёт число ромбов в независимости от их видов. А мы видим, что на площади 10 - тиугольника разместились ромбы двух видов.

Познакомившись с этим результатом пытливым читатель может воскликнуть: "здесь какая-то несправедливость. Почему такая мозаика возможна только для чётных многоугольников? А как же быть с нечётными?" Такие или примерно такие же вопросы возникли и у автора, когда он увидел впервые формулу (1).

Именно это и послужило толчком более внимательно посмотреть на правильные многоугольники с нечётным числом сторон. Исследованием этих многоугольников мы теперь и займёмся.

Начнём с самого простейшего n - угольника, т.е. для $n=3$ (Рис. 2).

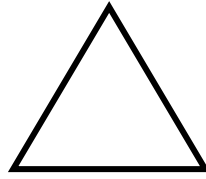


Рис. 2

По существу, это ни что иное как половинка ромба с углами 60 и 120° (Рис. 3).

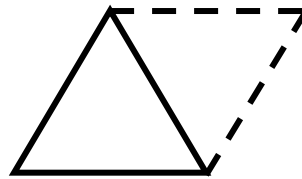


Рис. 3

Сразу возникает гипотеза: а может быть нечётные многоугольники можно замостить ромбами с точностью до половинки ромба? Рассмотрим правильный пятиугольник.

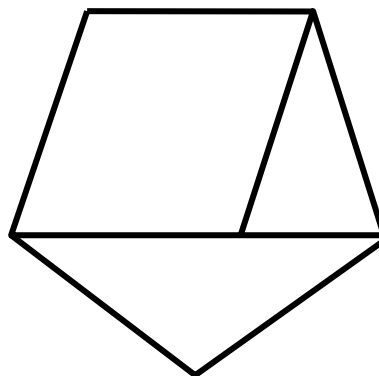


Рис. 4

Как видим, его можно замостить одним целым ромбом и двумя половинками.

Правильный семиугольник имеет мозаику из трёх ромбов и трёх половинок ромбов (Рис. 5).

Заметим, что пятиугольник имеет ромбы и половинки ромбов, принадлежащие к двум типам ромбов. Семиугольник имеет уже три различных типа ромбов.

Попробуем найти формулу для общего числа ромбов и половинок ромбов для нечётных многоугольников. Мы помним, что формула (1) даёт общее число ромбов в независимости от типов ромбов.

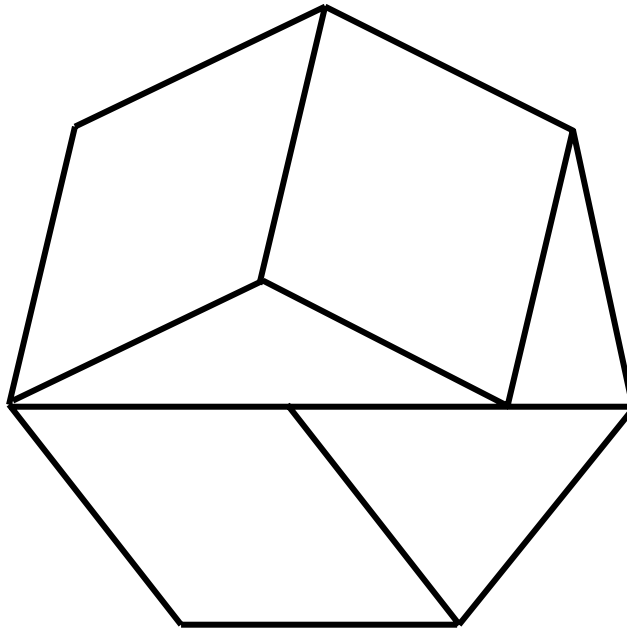


Рис. 5

Введём обозначения. Будем обозначать через r_i сумму ромбов типа i . Понятно, что для разных многоугольников r_i будут различны, т.е. например r_i для правильного треугольника не равна r_i для правильного пятиугольника и т.д. Общее число ромбов нечётного многоугольника обозначим через Z_H , тогда, на основе прямых построений, будем иметь:

$$Z_H(3) = r_1 = \frac{1}{2};$$

$$Z_H(5) = r_1 + r_2 = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2;$$

$$Z_H(7) = r_1 + r_2 + r_3 = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2};$$

$$Z_H(9) = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 8;$$

и т. д..

Т.е. напрашивается общая формула:

$$Z_H = \frac{(n-1)^2}{8} \quad (2)$$

Докажем, что это действительно так.

Пусть дан правильный n -угольник, где n - нечётное. Будем последовательно вписывать ромбы, как это показано на Рис. 6. Пусть рассматриваемая часть n -угольника состоит из K сторон.

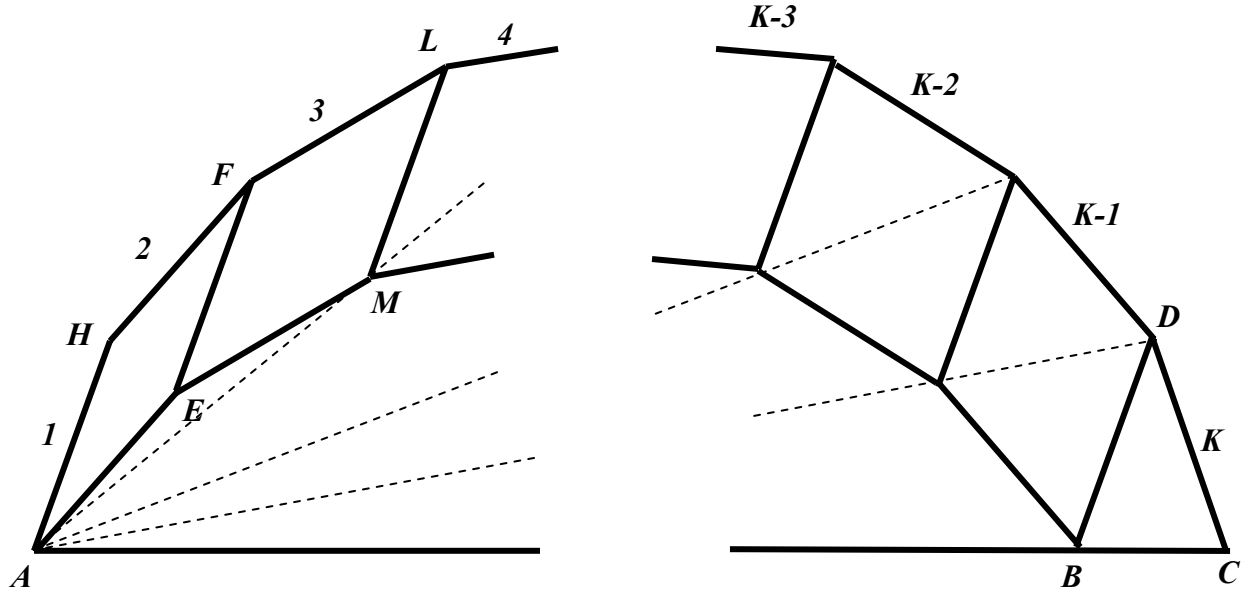


Рис.6

I

Рассмотрим первый вписанный ромб $AHFE$. Угол $\angle AHF = \alpha_1 = \pi - \frac{2\pi}{n}$, т.к. мы рассматриваем правильный n -угольник. Тогда смежный с ним угол этого ромба будет равен $\beta_1 = \frac{2\pi}{n}$. Соответственно будем обозначать для каждой стороны i ($i \geq 1$) нашего правильного n -угольника, прилегающие к ней смежные углы ромбов через α_{i-1} и β_{i-1} .

Определим углы ромба $EFLM$.

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \beta_1 = \pi - \frac{4\pi}{n}; \quad \beta_2 = \frac{4\pi}{n}.$$

Углы следующего ромба:

$$\alpha_3 = \alpha_1 - \beta_2 = \pi - \frac{6\pi}{n}; \quad \beta_3 = \frac{6\pi}{n},$$

и т.д.

Очевидно, что

$$\alpha_{K-2} = \pi - \frac{2(K-2)\pi}{n}; \quad \beta_{K-2} = \frac{2(K-2)\pi}{n}.$$

Соединим точку C с точкой B , получим равнобедренный треугольник DBC .

$$\text{Угол } \angle DBC = \frac{1}{2}(\pi - (\alpha_1 - \beta_{K-2})) = \frac{1}{2}\left(\pi - \pi + \frac{2\pi}{n} + \frac{2(K-2)\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n}(K-1).$$

Вписанный угол, в описанную окружность нашего n -угольника, стягивающий $(K-1)$ сторону, как раз равен $\frac{\pi}{n}(K-1)$. Следовательно, угол $\angle DCB$ и есть такой угол. А из этого следует, что точки A , B и C лежат на одной прямой.

Следовательно, вписывая таким образом ромбы, мы получим $(K-1)$ их различных видов. Причём, $(K-2)$ целых ромба и одну половинку.

Всегда ли вписанные таким образом ромбы действительно будут различны?

Рассмотрим случай, когда

$$\beta_i = \alpha_{i+1}$$

Отсюда имеем:

$$\beta_i = \frac{2i\pi}{n}$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_1 - \beta_i = \pi - \frac{2\pi}{n} - \frac{2i\pi}{n}$$

По предположению $\beta_i = \alpha_{i+1}$, следовательно

$$\pi - \frac{2\pi}{n} - \frac{2i\pi}{n} = \frac{2i\pi}{n}.$$

Откуда находим, что $n = 2(2i+1)$. Но n нечётно. Получаем противоречие.

Случая же, когда $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ вообще существовать не может ни при каких n . Доказательство этого утверждения мы оставляем читателям.

Т.о. ситуация равных по виду ромбов может возникнуть только в случае, когда наш многоугольник имеет чётное число сторон. А т. к. мы рассматриваем нечётные многоугольники, то получаемые таким построением ромбы будут различны по видам.

Кстати, оставляем на самостоятельное рассмотрение читателям и более общие случаи $\alpha_i = \alpha_{i+m}$ и $\beta_i = \alpha_{i+m}$.

Теперь нам необходимо определить максимальное число сторон K , при котором возможно такое построение ромбов.

Рассмотрим фрагмент Рис. 6, дополнив его ещё одной стороной $K+1$ (Рис. 7).

Нас будет интересовать случай, когда отрезки DB и CT не будут параллельны, причём расположены они будут таким образом, что $\alpha_1 + \alpha_{K-1} < \pi$.

Из этого условия получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{K-1} + \alpha_1 &= \left(\pi - \frac{2\pi}{n} - \frac{2(K-2)\pi}{n}\right) + \left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \\ &= \frac{2\pi n - 4\pi - 2\pi(K-2)}{n} < \pi. \end{aligned}$$

Откуда: $K > \frac{n}{2}$.

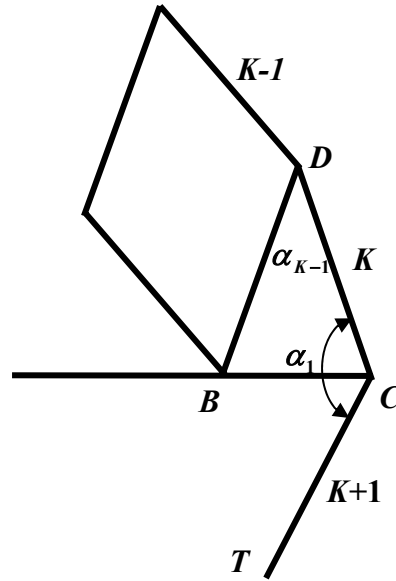


Рис. 7

K – это целое число. Поэтому наименьшее целое число, большее $\frac{n}{2}$ будет число $\frac{n+1}{2}$. Т. е. $K = \frac{n+1}{2}$.

Проведя в n -угольнике максимально возможную диагональ, мы поделим его на две части, состоящие из $\frac{n+1}{2}$ и $\frac{n-1}{2}$ сторон многоугольника и общей диагонали.

Строя ромбы на сторонах, как это было описано выше, мы получим $i = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$ различных видов ромбов на большей части и n -угольника и $i = \frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-3}{2}$ на его меньшей части. Причём очевидно, что ромбы на малой части и n -угольника не расширяют множество видов, полученных построением на большей части n -угольника. (Вид ромба определяет угол α_K).

Рассмотрим ломаную линию $AEK \dots B$. Понятно, что она состоит из $\frac{n+1}{2} - 2$ отрезков, равных между собой и параллельных сторонам нашего многоугольника 2, 3, 4, ..., $K-1$ соответственно (Рис.6). Следовательно, на этой ломаной, как на части многоугольника, можно построить $\left(\frac{n+1}{2} - 2\right) - 1$ ромбов различного вида.

Покажем получаемую цепь ромбов по видам. Для удобства и наглядности сведём все данные о видах ромбов в Таблицу 1.

Таблица 1

	r_1	r_2	r_3	r_4	...	$r_{\frac{n-1}{2}-2}$	$r_{\frac{n-1}{2}-1}$	$r_{\frac{n-1}{2}}$
$K = \frac{n+1}{2}$	1	1	1	1	...	1	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{n+1}{2}-2$	1	1	1	1	...	$\frac{1}{2}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
4	1	1	$\frac{1}{2}$...			
2	$\frac{1}{2}$...			

Данная таблица представляет виды вписанных ромбов в большую часть n -угольника, т.е. ограниченную $\frac{n+1}{2}$ сторонами.

Аналогичную таблицу представим и для второй части n -угольника, т.е. - с числом сторон $\frac{n-1}{2}$.

Таблица 2

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	...	$r_{\frac{n-3}{2}-2}$	$r_{\frac{n-3}{2}-1}$	$r_{\frac{n-3}{2}}$
$K = \frac{n-1}{2}$	1	1	1	1	1	...	1	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{n-1}{2}-2$	1	1	1	1	1	...	$\frac{1}{2}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
5	1	1	1	$\frac{1}{2}$...			
3	1	$\frac{1}{2}$...			

Таблица 1 и Таблица 2 описывают мозаику n -угольников, для которых $K = \frac{n+1}{2}$ - чётное, т.е. это многоугольники с числом сторон **3, 7, 11, 15, ...**

Из этих таблиц видим, что в каждом виде имеется какое-то число целых ромбов и одна половинка.

Определим сколько ромбов в каждом виде.

Рассмотрим столбец K (первый столбец) Таблицы 1. Он представляет собой арифметическую прогрессию:

$$2, 4, 6, \dots, \frac{n+1}{2}$$

Очевидно, что такая последовательность имеет $\frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{2} \right) = \frac{n+1}{4}$ членов.

Каждому члену, кроме первого, сопоставлен целый ромб (столбец r_1 Таблицы 1). Поэтому всего ромбов вида r_1 из таблицы 1 получаем:

$$r_1 = \frac{n+1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{4}.$$

Не трудно получить и число ромбов по остальным видам.

$$r_2 = r_1 - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{n-3}{4}$$

$$r_3 = r_2 - \frac{1}{2} = \frac{n-3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{n-5}{4}$$

и т.д.

$$r_i = r_{i-1} - \frac{1}{2} = \frac{n-(2i-1)}{4}$$

Рассмотрим Таблицу 2. Первый столбец этой таблицы представляет собой опять же арифметическую прогрессию:

$$3, 5, 7, \dots, \frac{n-1}{2}$$

Число членов такой прогрессии равно $\frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{2} - 1 \right) = \frac{n-3}{4}$. Каждому члену прогрессии сопоставлен один ромб (см. столбец r_1 Таблицы 2). Поэтому ромбов вида r_1 в Таблице 2 имеется:

$$r_1 = \frac{n-3}{4}.$$

Также, как и в первом случае, находим число ромбов по остальным видам.

$$r_2 = r_1 - \frac{1}{2} = \frac{n-3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{n-5}{4}$$

$$r_3 = r_2 - \frac{1}{2} = \frac{n-5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{n-7}{4}$$

и т.д.

$$r_i = r_{i-1} - \frac{1}{2} = \frac{n-(2i+1)}{4}$$

Сложив выражения r_i для первой и второй таблицы, получаем общую формулу для вычисления числа ромбов по видам:

$$r_i = \frac{n - (2i - 1)}{4} + \frac{n - (2i + 1)}{4} = \frac{n - 2i}{2}. \quad (3)$$

Теперь мы можем определить общее число ромбов в мозаике нашего n -угольника. Ранее мы говорили, что такой n -угольник имеет $\frac{n-1}{2}$ видов различных ромбов. Подставляя значения $i = \left\{ 1, 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2} \right\}$ в формулу (3), получаем такую последовательность:

$$\frac{n-2}{2}; \quad \frac{n-4}{2}; \quad \frac{n-6}{2}; \quad \dots \quad \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что это арифметическая прогрессия, т.к. разность членов a_{i+1} и a_i здесь постоянна. Напомним формулу для вычисления суммы арифметической прогрессии имеющей K членов:

$$S = \frac{a_1 + a_K}{2} K.$$

В нашем случае $a_1 = \frac{n-2}{2}$, $a_K = \frac{1}{2}$, $K = \frac{n-1}{2}$. Получаем:

$$\frac{\frac{n-2}{2} + \frac{1}{2}}{2} \left(\frac{n-1}{2} \right) = \left(\frac{n-1}{4} \right) \left(\frac{n-1}{2} \right) = \frac{(n-1)^2}{8}.$$

Как видим, мы получили формулу (2). Что и требовалось доказать.

Но это только часть доказательства. Как уже говорилось, всё это справедливо для n -угольников с числом сторон **3, 7, 11,...**

Построим аналогичные таблицы (Таблица 3, Таблица 4) для n -угольников, у которых $K = \frac{n+1}{2}$ - нечётное. Это многоугольники с числом сторон **5, 9, 13,...**

Таблица 3

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	...	$r_{\frac{n-1}{2}-2}$	$r_{\frac{n-1}{2}-1}$	$r_{\frac{n-1}{2}}$
$K = \frac{n+1}{2}$	1	1	1	1	1	...	1	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{n+1}{2} - 2$	1	1	1	1	1	...	$\frac{1}{2}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
5	1	1	1	$\frac{1}{2}$...			
3	1	$\frac{1}{2}$...			

Таблица 4

	r_1	r_2	r_3	r_4	...	$r_{\frac{n-3}{2}-2}$	$r_{\frac{n-3}{2}-1}$	$r_{\frac{n-3}{2}}$
$K = \frac{n-1}{2}$	1	1	1	1	...	1	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{n-1}{2}-2$	1	1	1	1	...	$\frac{1}{2}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
4	1	1	$\frac{1}{2}$...			
2	$\frac{1}{2}$...			

Как и в предыдущем случае, находим формулу для вычисления r_i .

Рассмотрим последовательность чисел первого столбца Таблицы 3.

$$3, 5, 7, \dots, \frac{n+1}{2}-2, \frac{n+1}{2}.$$

Число членов в этой последовательности равно: $\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right) = \frac{n-1}{4}$. Каждому члену последовательности сопоставлен один ромб столбца r_i . Т. о.

$$r_1 = \frac{n-1}{4}.$$

Как и в предыдущих случаях, число ромбов в каждом последующем виде на пол ромба меньше чем в предыдущем. Т. е. имеем:

$$r_2 = r_1 - \frac{1}{2} = \frac{n-3}{4};$$

$$r_3 = r_2 - \frac{1}{2} = \frac{n-5}{4};$$

$$r_4 = r_3 - \frac{1}{2} = \frac{n-7}{4}$$

и т.д.

$$r_i = r_{i-1} - \frac{1}{2} = \frac{n-(2i-1)}{4}.$$

Рассмотрим последовательность чисел столбца 1 Таблицы 4.

$$2, 4, 6, \dots, \frac{n-1}{2}.$$

Очевидно, что число членов этой последовательности равно $\frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{2} \right)$.

Следовательно для r_i Таблицы 4 получаем:

$$r_1 = \frac{n-3}{4};$$

$$r_2 = \frac{n-5}{4};$$

$$r_3 = \frac{n-7}{4};$$

и т. д.;

$$r_i = \frac{n-(2i+1)}{4}.$$

Как и в предыдущем случае, получаем общую формулу для суммы ромбов по видам:

$$r_i = \frac{n-2i}{2}$$

Т. к. максимальное число видов ромбов и в этом случае равно $\frac{n-1}{2}$, то формула (2) будет верна и для n -угольников с числом сторон **5, 9, 13, 17, ...**. Т. е. формула (2) справедлива для любого n -угольника с нечётным числом сторон.

Из формул (1) и (2) можно вывести общую формулу для числа ромбов в мозаике правильного n -угольника.

$$Z = \frac{2n(n-2)+1-(-1)^n}{16} \quad (4)$$

Примеры:

$$n = 9, \quad Z = \frac{2 \cdot 9 \cdot (9-2) + 1 - (-1)^9}{16} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 7 + 2}{16} = 8.$$

$$r_1 = \frac{9-2}{2} = 3 \frac{1}{2};$$

$$r_2 = \frac{9-4}{2} = 2 \frac{1}{2};$$

$$r_3 = \frac{9-6}{2} = 1 \frac{1}{2};$$

$$r_4 = \frac{1}{2};$$

$$Z = r_1 + r_2 + r_3 + r_4. \text{ (Рис.8)}$$

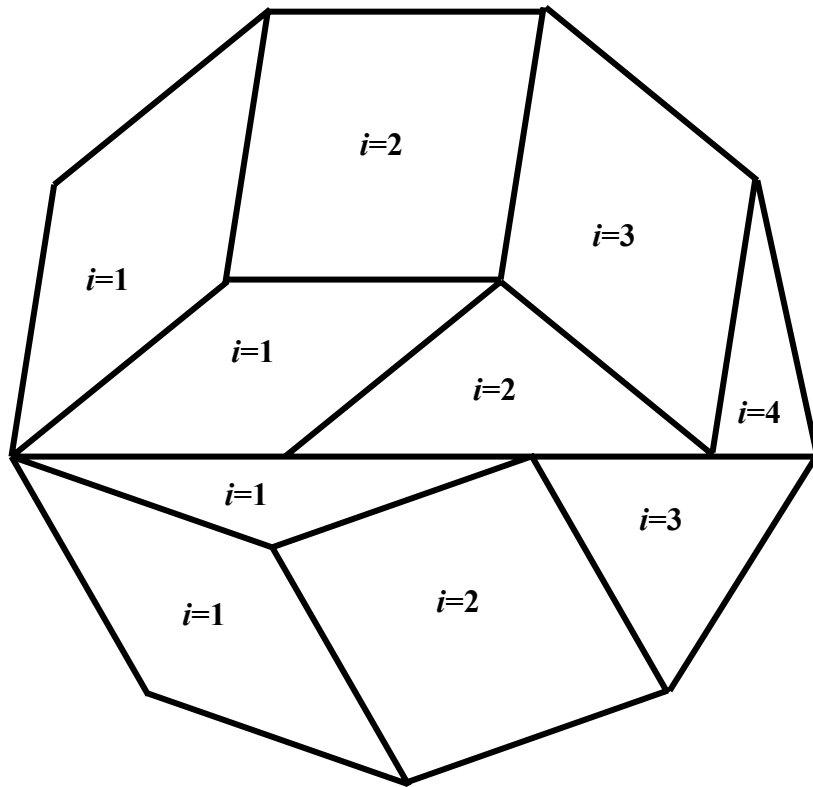


Рис. 8

$$n=11; \quad Z = 12\frac{1}{2}; \quad r_1 = \frac{11-2}{2} = 4\frac{1}{2}; \quad r_2 = \frac{11-4}{2} = 3\frac{1}{2}; \quad r_3 = \frac{11-6}{2} = 2\frac{1}{2};$$

$$r_4 = \frac{11-8}{2} = 1\frac{1}{2}; \quad r_5 = \frac{1}{2}; \quad Z = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5. \text{ (Рис.9)}$$

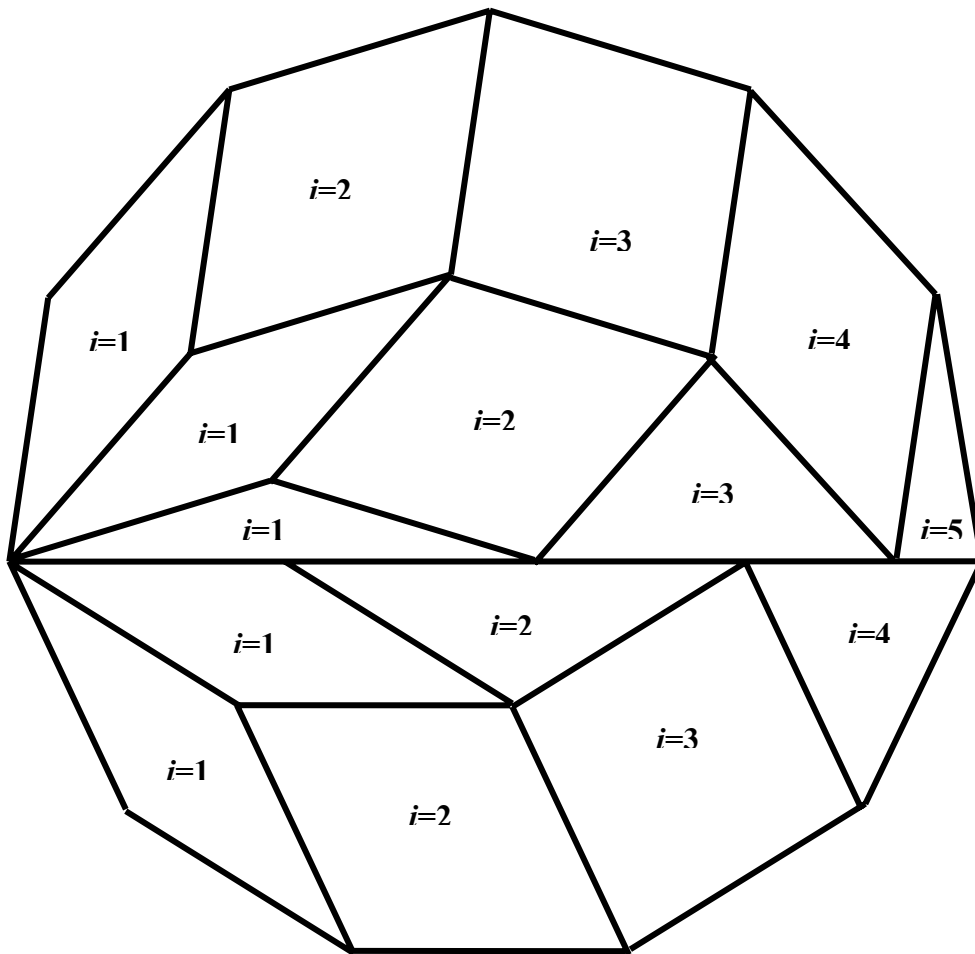


Рис. 9

Оказывается, что кроме показанной для n -угольников существует и другая ромбическая мозаика. Исследованием этой новой мозаики мы сейчас и займёмся.

Разделим каждую сторону n -угольника на K равных отрезка. Теперь, если из данного n -угольника со стороной a , определённым образом вырезать K правильных n -угольников, то оставшуюся площадь можно замостить N ромбами со стороной $\frac{a}{K}$.

Выведем формулу для N .

Если стороны n -угольника разделить на K равных отрезка, а также и стороны ромбов, образующих его мозаику (которую мы рассматривали выше), то в каждом ромбе можно разместить K^2 подобных ему ромбов со стороной $\frac{a}{K}$. Т. е. будем иметь $K^2 Z$ маленьких ромбов. Но каждый маленький вырезанный n -угольник сам содержит Z ромбов со стороной $\frac{a}{K}$. Отсюда получаем:

$$N = K^2 Z - K \cdot Z = Z \cdot K \cdot (K - 1) \quad (5)$$

Для n -угольников, с нечётным числом сторон, в этом случае, имеем такую формулу для суммы ромбов по видам:

$$q_i = K(K-1)\frac{n-2i}{2} \quad (6)$$

$$i = \left\{ 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \right\}.$$

Пример 1: $n = 5$: $K = 2$.

$$N = 2(2-1)\frac{(5-1)^2}{8} = 4;$$

$$i = \{1, 2\};$$

$$q_1 = 2(2-1)\frac{5-2}{2} = 3; \quad q_2 = 2(2-1)\frac{5-4}{2} = 1.$$

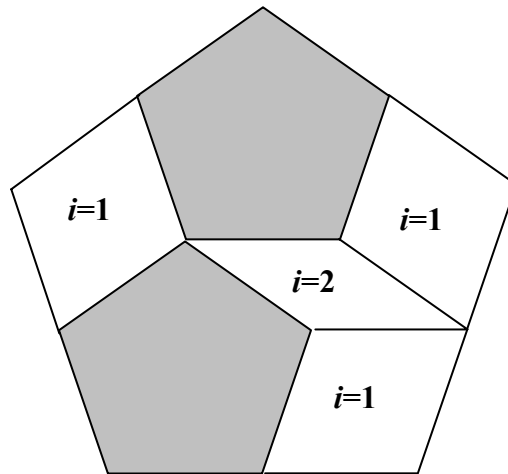


Рис. 10

Пример 2: $n = 5$: $K = 3$.

$$N = 3(3-1)\frac{(5-1)^2}{8} = 12;$$

$$i = \{1, 2\}$$

$$q_1 = 3(3-1)\frac{5-2}{2} = 9; \quad q_2 = 3(3-1)\frac{5-4}{2} = 3.$$

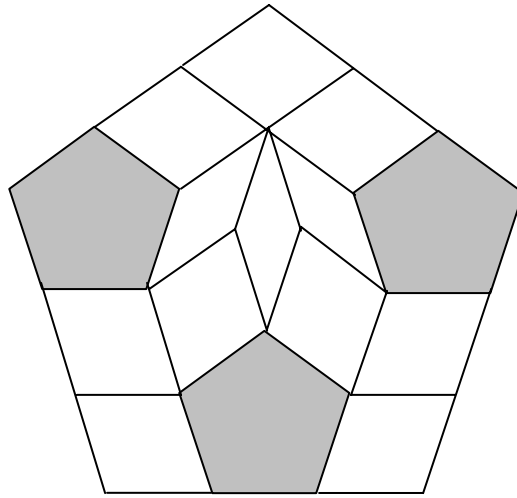


Рис. 11

Очевидно, что для $n = 5$ и любом K отношение $\frac{q_1}{q_2} = 3$. Это сразу видно из формулы (6).

Будем называть мозаику, как на Рис. 10, 11, мозаикой малых ромбов.

Можно дать более общее определение мозаик малых ромбов.

Если стороны данного n -угольника разделить на K равных отрезков и вырезать из него определённым образом $n_1, n_2, n_3, \dots, n_j$ правильных n -угольников, стороны которых $a_1, a_2, a_3, \dots, a_j$ кратны $\frac{a}{K}$ (т. е. длина каждой стороны a_j нацело делится на $\frac{a}{K}$) и $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_j = a$, то оставшуюся площадь можно замостить мозаикой малых ромбов (т. е. ромбами со стороной $\frac{a}{K}$). Здесь a – длина стороны исходного n -угольника.

Вычислим число N малых ромбов, которые потребуются для этой мозаики.

Весь n -угольник можно замостить $K^2 Z$ малыми ромбами. Сторона каждого малого n_j -угольника разделена на $\frac{a_j}{a} = \frac{Ka_j}{a}$ отрезков. Поэтому его можно замостить

$\left(\frac{Ka_j}{a}\right)^2 Z$ малыми ромбами. Отсюда получаем общую формулу:

$$N = K^2 Z - Z \sum_{x=1}^j \left(\frac{Ka_x}{a}\right)^2 = K^2 Z \left(1 - \sum_{x=1}^j \left(\frac{a_x}{a}\right)^2\right). \quad (7)$$

Здесь $\sum_{x=1}^j \left(\frac{a_x}{a}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a_j}{a}\right)^2$.

Для $K = 5$ будем иметь шесть принципиально различных типов мозаик, т. к.

$$1). a = \frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{a}{5};$$

В этом случае из нашего n -угольника вырезается пять малых n -угольников со стороной $\frac{a}{5}$. Подобные случаи мы уже рассмотрели и показали примеры на Рис. 10 и Рис. 11 (здесь $K = 2$ и $K = 3$ соответственно).

$$2). a = \frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{2a}{5};$$

В этом случае надо вырезать четыре малых n -угольника. Три со стороной $\frac{a}{5}$ и один со стороной $\frac{2a}{5}$.

$$3). a = \frac{a}{5} + \frac{2a}{5} + \frac{2a}{5};$$

$$4). a = \frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{3a}{5};$$

$$5). a = \frac{2a}{5} + \frac{3a}{5};$$

$$6). a = \frac{a}{5} + \frac{4a}{5}.$$

Приведём примеры мозаик для $n=3$ и $K=5$.

$$1). Z = \frac{(3-1)^2}{8} = \frac{1}{2}; \quad \frac{a_x}{a} = \frac{1}{5}; \quad j = 5; \quad i = 1.$$

$$N = 25 \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 \right) = 10.$$

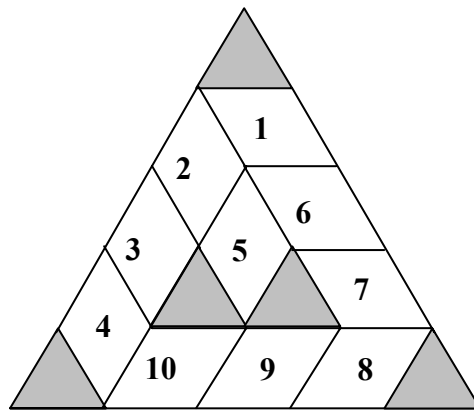


Рис. 12

Причём это не единственная мозаика при таких условиях. Пять маленьких треугольников можно поразному варьировать внутри большого треугольника.

$$2). \frac{a_1}{a} = \frac{1}{5}; \quad \frac{a_2}{a} = \frac{1}{5}; \quad \frac{a_3}{a} = \frac{1}{5}; \quad \frac{a_4}{a} = \frac{2}{5}; \quad j = 4; \quad N = 9..$$

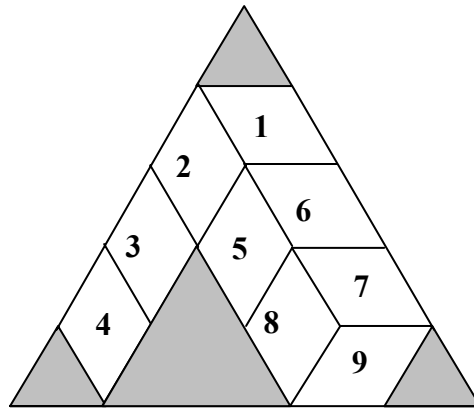


Рис. 13

$$3). \frac{a_1}{a} = \frac{2}{5}; \quad \frac{a_2}{a} = \frac{2}{5}; \quad \frac{a_3}{a} = \frac{1}{5}; \quad j = 3; \quad N = 8.$$

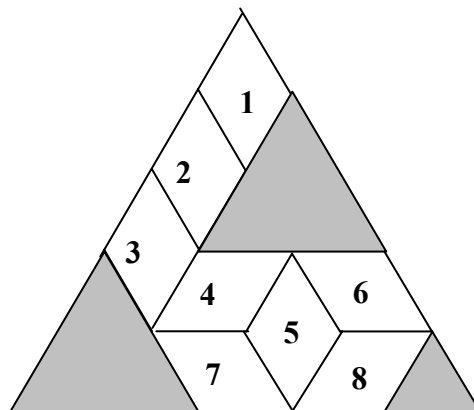


Рис. 14

$$4). \frac{a_1}{a} = \frac{3}{5}; \quad \frac{a_2}{a} = \frac{1}{5}; \quad \frac{a_3}{a} = \frac{1}{5}; \quad j=3; \quad N=7.$$

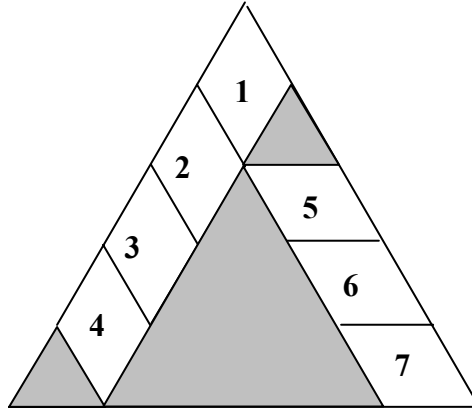


Рис. 15

$$5). \frac{a_1}{a} = \frac{3}{5}; \quad \frac{a_2}{a} = \frac{2}{5}; \quad j=2; \quad N=6.$$

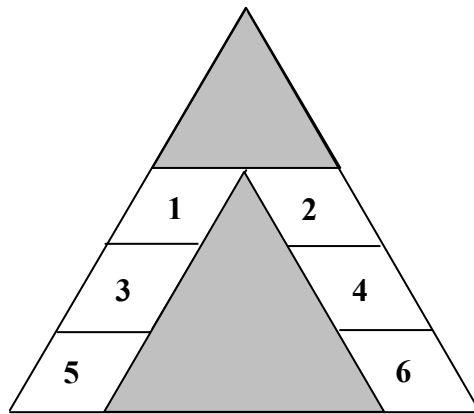


Рис. 16

$$6). \frac{a_1}{a} = \frac{1}{5}; \quad \frac{a_2}{a} = \frac{4}{5}; \quad j=2; \quad N=4$$

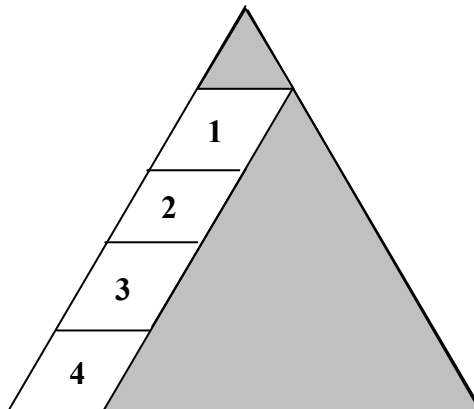


Рис. 17

А теперь приведём примеры мозаик правильного пятиугольника при таких условиях:

$$1). n=5, K=3, \frac{a_x}{a} = \frac{1}{3}; j=3; N=12, q_1=9, q_2=3.$$

Мы будем считать мозаики различными, если различны расположения малых пятиугольников внутри большого относительно друг друга с точностью до поворотов и зеркальных отражений.

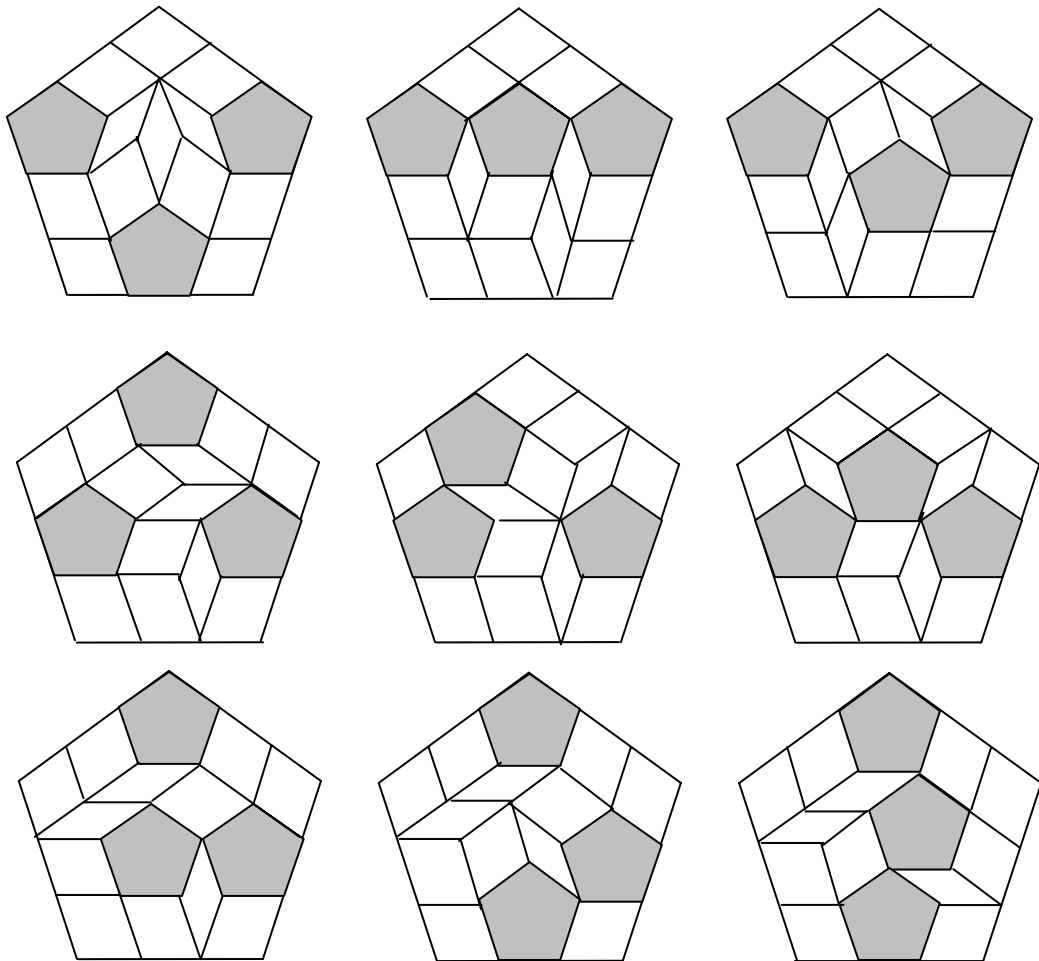


Рис. 18

$$2). n=5, K=3, \frac{a_1}{a} = \frac{1}{3}; \frac{a_2}{a} = \frac{2}{3}; j=2; N=8, q_1=6, q_2=2.$$

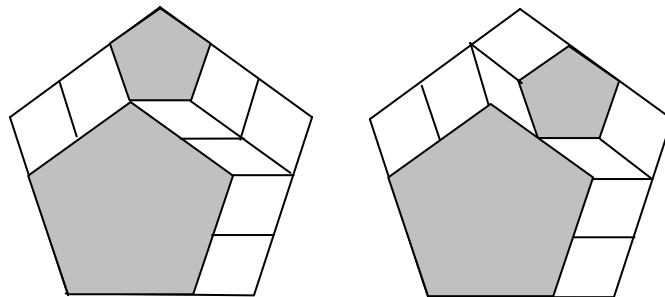


Рис. 19

Нам удалось найти 11 различных мозаик при таких условиях. Возможно, что их существует больше.

В заключение мы формулируем несколько проблем для самостоятельных исследований заинтересованных читателей.

1). Исследовать n -угольники с чётным числом сторон по видам ромбов (в нашей работе мы совсем не касались этого вопроса).

2). Всегда ли справедливо соотношение: $\frac{r_i}{r_k} = \frac{q_i}{q_k}$?

3). Каковы критерии расположения малых n -угольников внутри большого для успешной выкладки мозаик малых ромбов? Когда мы говорили о мозаике малых ромбов, мы всегда оговаривались: «вырезать определённым образом», т. е. ни при любом расположении малых n -угольников удаётся выложить мозаику.

4). Сколькими различными способами при конкретных n , K , $\frac{a_x}{a}$ можно замостить данный многоугольник с точностью до поворотов и зеркальных отражений? Может быть, существует формула для числа мозаик в зависимости от этих параметров?

5). **Гипотеза:** Если из правильного n -угольника ($n = k \cdot m$) со стороной a , определённым образом вырезать k правильных m -угольников со стороной a , то оставшуюся площадь можно замостить целыми ромбами со стороной a . Причём, как выяснилось, для некоторых n -угольников существуют качественно различные мозаики, т. е. при равных n , k , m число ромбов в мозаиках и виды ромбов могут быть различны.

Покажем несколько примеров.

Пример 1. $n = 10$, $k=2$, $m=5$.

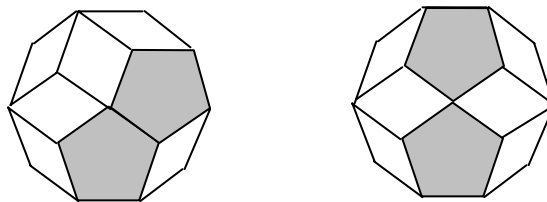


Рис. 20

Эти мозаики различны только взаимным расположением пятиугольников.

Пример 2. $n = 9$, $k=m=3$.

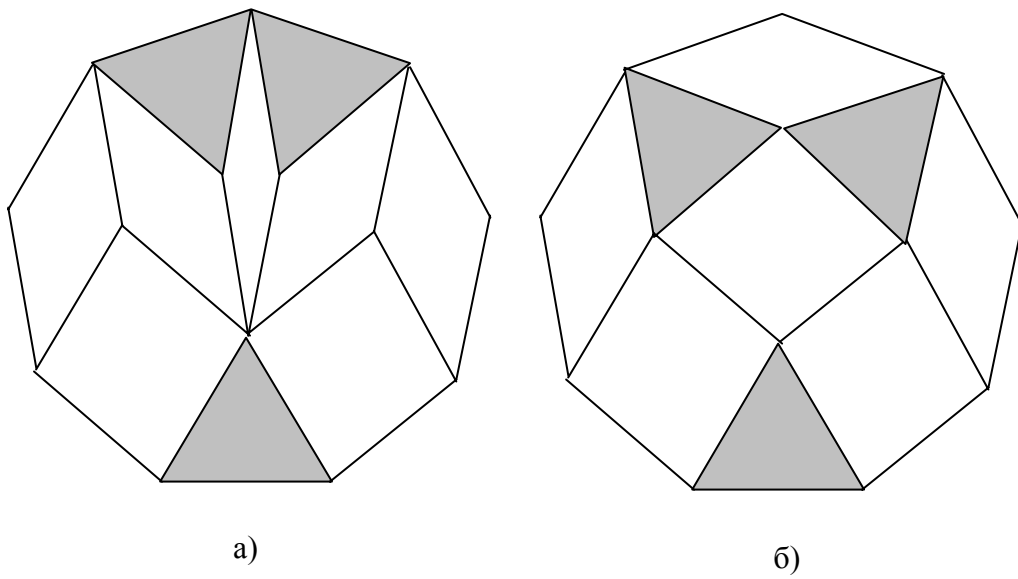


Рис. 21

Как видим из Рис. 21, данные мозаики имеют качественное различие. Одна мозаика состоит из 7-ми ромбов, другая – из 6-ти ромбов. Причём мозаики различны и по виду ромбов. В мозаике, показанной на Рис. 21 б) отсутствует ромб с углом в 20° .

Пример 3. $n = 15$, $k=3$, $m=5$.

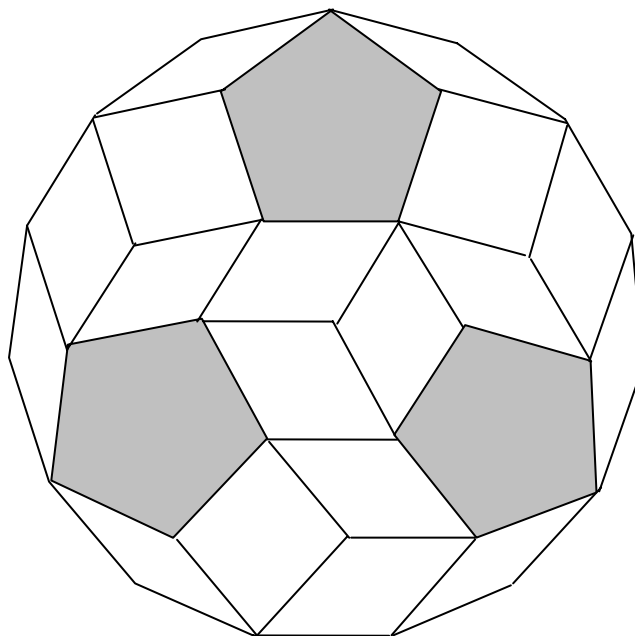


Рис. 22

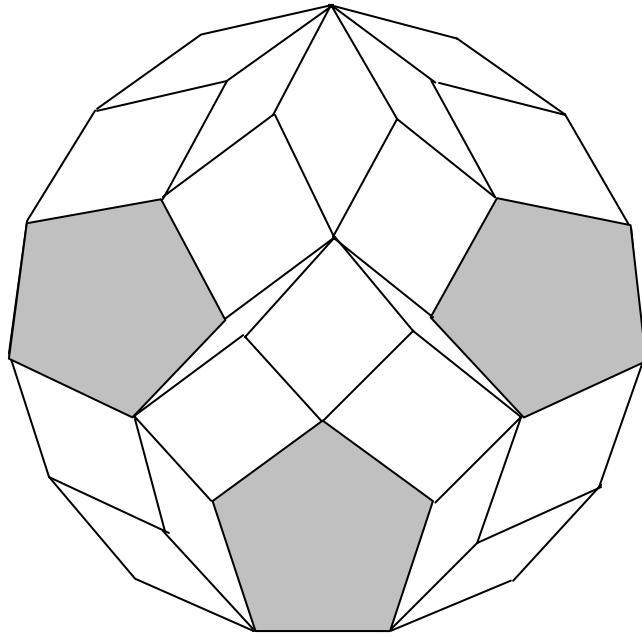


Рис. 23

На Рис. 22 и 23 показаны также качественно различные мозаики. В первом случае мозаика состоит из 18-ти ромбов и не имеет ромба с углом в 12° . Вторая же мозаика состоит из 20-ти ромбов.

Пример 4. $n = 15$, $k=5$, $m=3$.

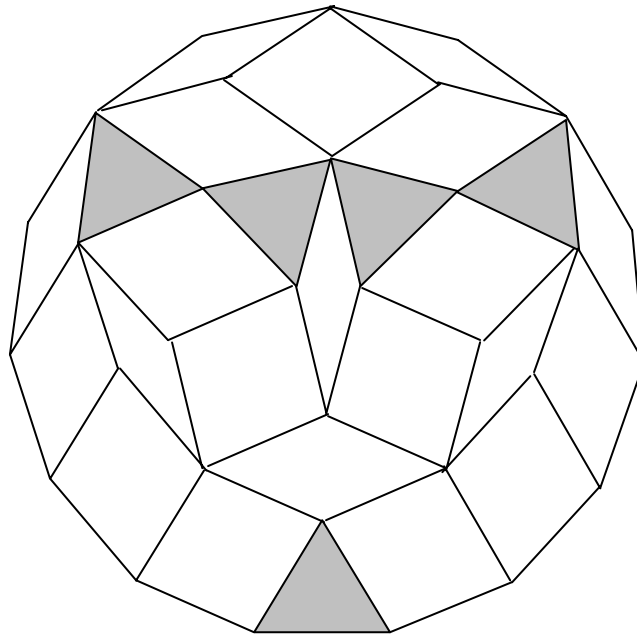


Рис. 24

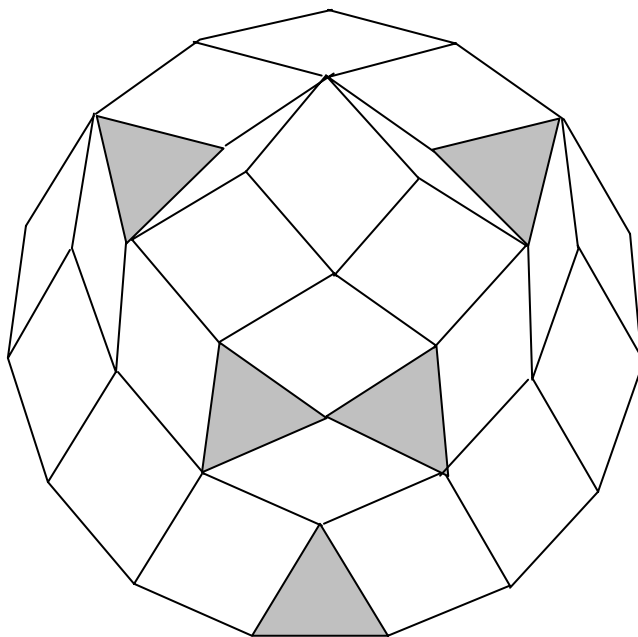


Рис. 25

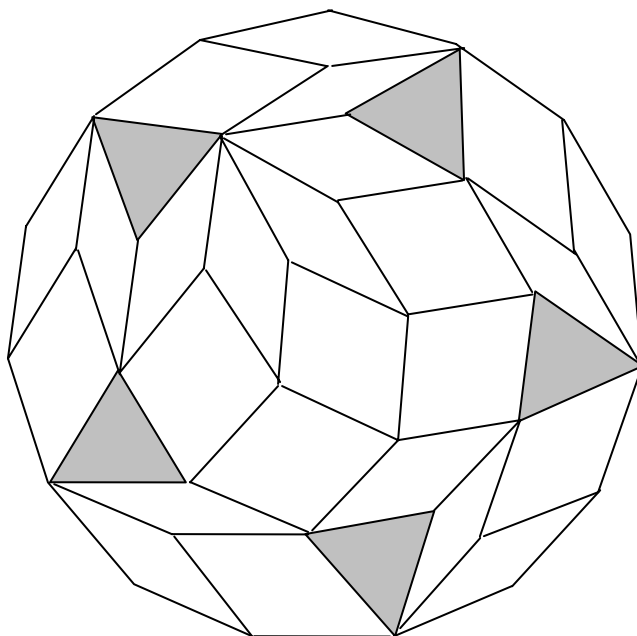


Рис. 26

На всех трёх рисунках 24, 25, 26 представлены качественно различные мозаики. Мозаика, показанная на Рис. 24 имеет 20 ромбов, но не имеет ромба с углом в 12° .

Мозаика – Рис. 25 состоит из 22 ромбов и не имеет ромба с углом в 36° . А мозаика – Рис. 26 состоит из 25 ромбов, но не имеет ромба с углом 84° .

Мы думаем, что вопрос о количестве качественно различных мозаик, при конкретных n , k , и m может быть также темой отдельного исследования. А так же и вопрос: существуют ли качественно различные по видам ромбов мозаики среди многоугольников с чётным числом сторон или это привилегия только «нечётных» многоугольников.