Франц Герман

Теория векторных функций геометрических преобразований

(www.franz-hermann.com)

1. Подобие второго рода. Гомотетия. Осевая симметрия.

Известно, что преобразование подобия второго рода (обозначим через $\boldsymbol{P}$) представляет собой коммутативную композицию осевой симметрии Σ_{OX} (относительно оси OX) и гомотетии $\boldsymbol{G}_O^k$, где $\boldsymbol{k}$ - коэффициент подобия.

Известно также, что преобразование P всегда имеет одну неподвижную точку и две, взаимно перпендикулярные неподвижные прямые.

Если в качестве осей декартовых координат выбрать неподвижные прямые преобразования подобия второго рода, то преобразование $\boldsymbol{P}$ можно представить в этих координатах как векторную функцию.

Покажем на примере, как можно построить такую систему координат, зная две точки образа и две точки праобраза преобразования подобия второго рода.

Пусть $\boldsymbol{P}_2$: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{P_2} \boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B} \xrightarrow{P_2} \boldsymbol{B}^*$, где $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{2}$ (Рис. 1).

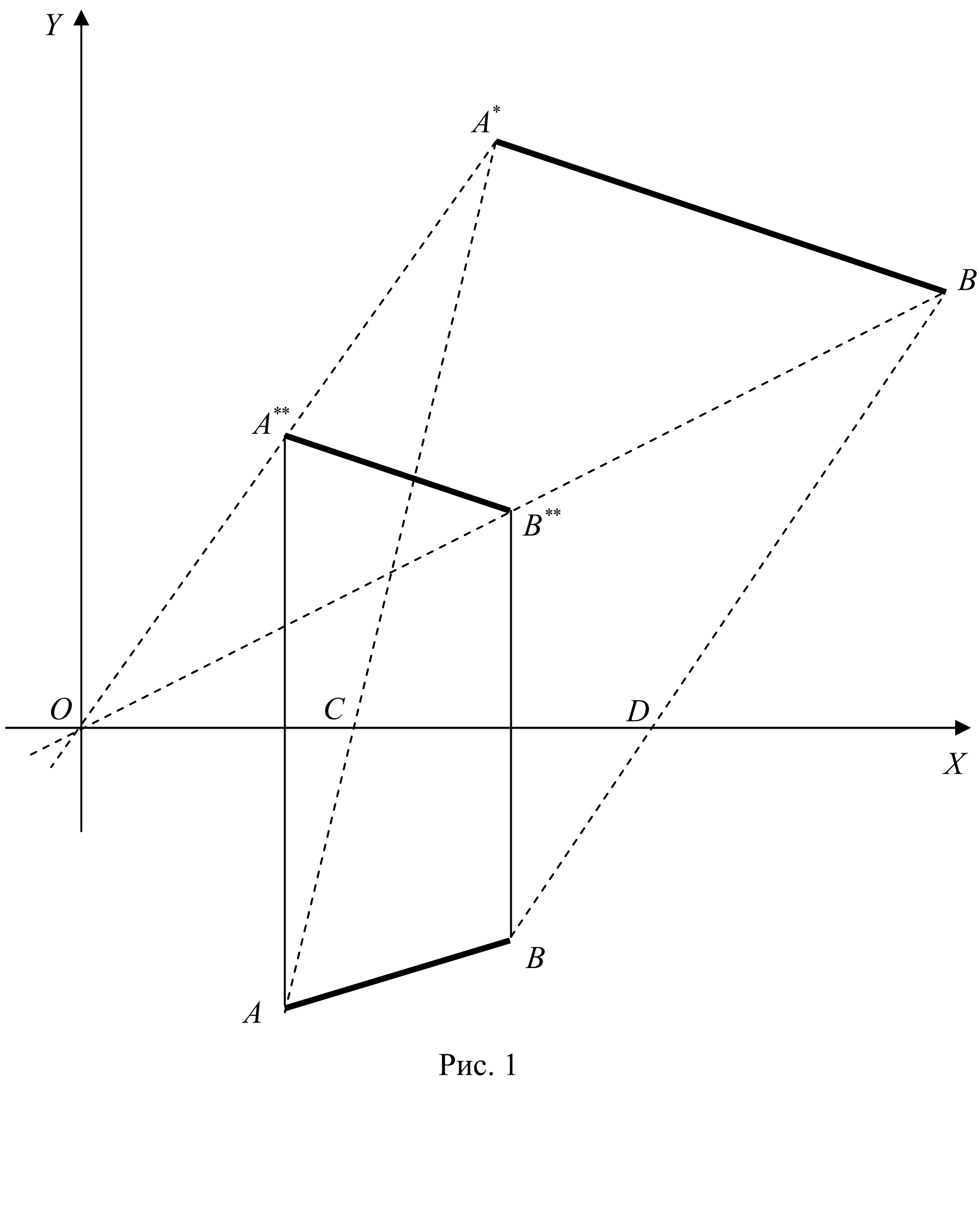

Рис. 1

Разделим отрезки AA^* и BB^* точками C и D соответственно, таким образом, что $A^*C = 2 \cdot CA$ и $B^*D = 2 \cdot DB$.

Прямая CD будет первой неподвижной прямой преобразования P_2.

Далее построим отрезок $A^{**}B^{**}$, как образ отрезка AB при преобразовании осевой симметрии Σ_{CD}: $A \xrightarrow{\Sigma_{CD}} A^{**}, B \xrightarrow{\Sigma_{CD}} B^{**}$.

Точка $O \equiv A^*A^{**} \cap CD$ (или $O \equiv B^*B^{**} \cap CD$) бедет неподвижной точкой преобразования P_2.

Примем за ось абсцисс -OX, искомой декартовой системы координат, прямую CD, тогда осью ординат -OY будет прямая, перпендикулярная прямой CD и проходящая через точку O.

Таким образом, мы построили инвариантную систему (ИС) декартовых координат преобразования P_2.

Покажем, как можно в общем виде записать преобразование P_k в (ИС) координат в виде векторной функции.

Пусть P_k: $A \xrightarrow{P_k} A^*$, где $A(x_A; y_A)$, $A^*(x_A^*; y_A^*)$. Но с другой стороны $x_A^* = k \cdot x_A$, $y_A^* = -k \cdot y_A$ (в качестве наглядной иллюстрации здесь можно воспользоваться примером построения преобразования второго рода, показанного на Рис. 1).

Обозначим через $\overrightarrow{P_k}$ – векторную функцию преобразования P_k. Т. е. запись $\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{P_k}$ будем считать равносильной записи P_k: $A \xrightarrow{P_k} A^*$. Тогда

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_k} = (x_A^* - x_A) \cdot \vec{i} + (y_A^* - y_A) \cdot \vec{j} = (k \cdot x_A - x_A) \cdot \vec{i} + (-k \cdot y_A - y_A) \cdot \vec{j} =$$

$$= (k-1)x_A \cdot \vec{i} - (k+1)y_A \cdot \vec{j}$$

Т. к. в качестве точки $A(x_A; y_A)$ была выбрана произвольная точка, то можем записать в общем виде:

$$\boxed{\overrightarrow{P_k} = (k-1)x \cdot \vec{i} - (k+1)y \cdot \vec{j}} \qquad (1)$$

Пример

Найти векторную функцию преобразования подобия второго рода P_2 и образ A^* для точки $A(2;-1)$ в инвариантной системе координат.

Обозначим начало (ИС) координат через точку O, тогда $\overrightarrow{OA} = 2 \cdot \vec{i} - \vec{j}$.

Векторная функция данного преобразования, согласно формуле (1), будет иметь вид:

$$\overrightarrow{P_2} = (2-1) \cdot 2 \cdot \vec{i} - (2+1) \cdot (-1) \cdot \vec{j} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$$

$$\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{P_2} = 2 \cdot \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2 \cdot \overrightarrow{i} + 3 \cdot \overrightarrow{j} = 4 \cdot \overrightarrow{i} + 2 \cdot \overrightarrow{j}$$

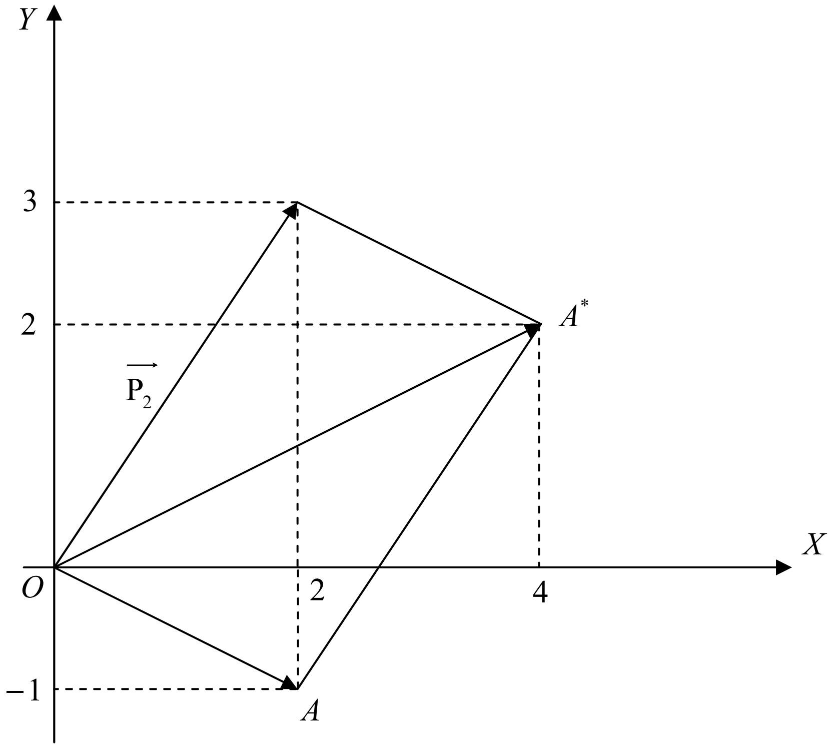

Рис. 2

В дальнейшем все преобразования будем рассматривать в инвариантной для всех $\overrightarrow{P_k}$ системе координат $\boldsymbol{XOY}$.

Обозначим через G_O^k – преобразование гомотетии, относительно начала координат с коэффициентом подобия $\boldsymbol{k}$.

Пусть $A(x, y) \xrightarrow{G_O^k} A^*(kx, ky)$, тогда

$$\overrightarrow{G_O^k} = \overrightarrow{OA^*} - \overrightarrow{OA} = (kx - x) \cdot \overrightarrow{i} + (ky - y) \cdot \overrightarrow{j} = (k - 1) \cdot \left(x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{G_O^k} = (k - 1) \cdot \left(x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j}\right)} \qquad (2)$$

Аналогично можно представить преобразование осевой симметрии Σ_{OX}, относительно оси $\boldsymbol{OX}$ в виде векторной функции $\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$.

$$\boxed{\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = -2 \cdot y \cdot \overrightarrow{j}} \qquad (3)$$

Обозначим через $\oplus$ операцию композиции двух преобразований. Известно, что:

$$P_k \oplus \Sigma_{OX} \to G_O^k; \qquad (a)$$

$$G_O^k \oplus \Sigma_{OX} \to P_k \,; \qquad \text{(b)}$$

$$P_k \oplus G_O^n \to P_{kn} \,; \qquad \text{(c)}$$

$$P_k \oplus P_n \to G_O^{kn} \,; \qquad \text{(d)}$$

$$G_O^k \oplus G_O^n \to G_O^{kn} \,; \qquad \text{(e)}$$

$$\Sigma_{OX} \oplus \Sigma_{OX} \to T \,, \qquad \text{(f)}$$

где T - тождественное преобразование. Ему в соответствие поставим вектор $\overrightarrow{0}$.

Под векторной композицией двух преобразований будем представлять векторное сложение соответствующих векторных функций.

Выведем правила векторных композиций.

Запишем (а) в векторной форме:

$$\overrightarrow{G_O^k} = a \cdot \overrightarrow{P_k} + b \cdot \overrightarrow{\Sigma_{OX}} \,,$$

где a и b некоторые, пока неизвестные нам коэффициенты.

Найдём a и b, используя формулы (1), (2) и (3).

$$(k-1)\cdot\left(x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j}\right) = a \cdot \left((k-1)\cdot x \cdot \overrightarrow{i} - (k+1)\cdot y \cdot \overrightarrow{j}\right) + b \cdot \left(-2 \cdot y \cdot \overrightarrow{j}\right)$$

В силу этого равенства можем записать такую систему уравнений:

$$\begin{cases} k-1 = a \cdot (k-1) \\ k-1 = -a \cdot (k+1) - 2 \cdot b \end{cases}$$

Из первого уравнения сразу видим, что $a = 1$.

Из второго уравнения находим b

$$k - 1 = -k - 1 - 2 \cdot b \,; b = -k \,.$$

Получаем первое правило векторной композиции:

$$P_k \oplus \Sigma_{OX} \to G_O^k \Rightarrow \overrightarrow{G_O^k} = \overrightarrow{P_k} - k \cdot \overrightarrow{\Sigma_{OX}} \,.$$

Найдём правило векторной композиции для (b).

$$\overrightarrow{P_k} = a \cdot \overrightarrow{G_O^k} + b \cdot \overrightarrow{\Sigma_{OX}}$$

Из предыдущего правила можно записать:

$$G_O^k \oplus \Sigma_{OX} \to P_k \Rightarrow \overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{G_O^k} + k\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$$

Найдём правило для (c).

$$\overrightarrow{P_k} = a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{G_O^n}$$

или

$$(kn-1)x\cdot\vec{i} - (kn+1)y\cdot\vec{j} = a\left((k-1)x\cdot\vec{i} - (k+1)y\cdot\vec{j}\right) + b(n-1)\left(x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}\right);$$

или в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} kn-1 = a(k-1) + b(n-1) \\ -kn-1 = -a(k+1) + b(n-1) \end{cases}.$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим: $2kn = 2ak$, откуда $a = n$

Подставляя полученный результат во второе уравнение, находим $b = 1$. Таким образом:

$$P_k \oplus G_O^n \to P_{kn} \Rightarrow \overrightarrow{P_{kn}} = n\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_O^n}$$

Заметим, что $\overrightarrow{P_{kn}} = n\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_O^n} = k\overrightarrow{P_n} + \overrightarrow{G_O^k}$

Для (d) запишем:

$$\overrightarrow{G_O^{kn}} = a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{P_n}\text{ , или}$$

$$(kn-1)\left(x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}\right) = a\left((k-1)x\cdot\vec{i} - (k+1)y\cdot\vec{j}\right) + b\left((n-1)x\cdot\vec{i} - (n+1)y\cdot\vec{j}\right)\text{, откуда:}$$

$$\begin{cases} kn-1 = a(k-1) + b(n-1) = ak - a + bn - b \\ kn-1 = -a(k+1) - b(n-1) = -ak - a - bn - b \end{cases}.$$

Сложем оба уравнения и разделим на 2, получим: $kn-1 = -(a+b)$. Теперь вычтем из первого уравнение второе, получим: $ak + bn = 0$.

$$\begin{cases} kn-1 = -(a+b) \\ ak + bn = 0 \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений находим a и b:

$$a = \frac{n(kn-1)}{k-n}, \qquad b = \frac{k(kn-1)}{k-n}$$

Получаем следующее правило для композиции преобразований (d):

$$P_k \oplus P_n \to G_O^{kn} \Rightarrow \overrightarrow{G_O^{kn}} = \frac{kn-1}{k-n}\left(n\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{P_n}\right), \qquad k \neq n .$$

Запишем векторный вид композиции преобразований (e):

$$\overrightarrow{G_O^{kn}} = a\overrightarrow{G_O^k} + b\overrightarrow{G_O^n}.$$

Используя предыдущее правило, можно записать:

$$\overrightarrow{G_O^{kn}} = a\overrightarrow{G_O^k} + b\overrightarrow{G_O^n} = \frac{kn-1}{k-n}\left(n\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{P_n}\right) \qquad (4)$$

Ранее было найдено, что $\overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{G_O^k} + k\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$, $\overrightarrow{P_n} = \overrightarrow{G_O^n} + n\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$. Подставим эти выражения в (4), получим правило векторной операции для композиции преобразований (e):

$$G_O^k \oplus G_O^n \to G_O^{kn} \Rightarrow \overrightarrow{G_O^{kn}} = \frac{kn-1}{k-n}\left(n\overrightarrow{G_O^k} - k\overrightarrow{G_O^n}\right).$$

Для композиции (f), имеем очевидное правило:

$$a\overrightarrow{\Sigma_{OX}} + b\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \vec{0}, \quad \text{где } a = -b,\ a - \text{любое.}$$

Сведём все полученные формулы в таблицу.

Таблица 1

$G_O^k \oplus \Sigma_{OX} \to P_k$	$\overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{G_O^k} + k\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$		(I)
$P_k \oplus \Sigma_{OX} \to G_O^k$	$\overrightarrow{G_O^k} = \overrightarrow{P_k} - k\cdot\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$		(II)
$P_k \oplus G_O^n \to P_{kn}$	$\overrightarrow{P_{kn}} = n\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_O^n}$		(III)
$G_O^k \oplus G_O^n \to G_O^{kn}$	$\overrightarrow{G_O^{kn}} = \frac{kn-1}{k-n}\left(n\overrightarrow{G_O^k} - k\overrightarrow{G_O^n}\right)$	$k \neq n$	(IV)
$P_k \oplus P_n \to G_O^{kn}$	$\overrightarrow{G_O^{kn}} = \frac{kn-1}{k-n}\left(n\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{P_n}\right)$,	$k \neq n$	(V)
$\Sigma_{OX} \oplus \Sigma_{OX} \to T$	$\vec{0}$		(VI)

2. Следствия векторных формул

Следствие 1. $\overrightarrow{G_O^k} + k\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}} = \vec{0} \Rightarrow G_O^k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \to T$

Доказательство.

Заметим, что $\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{\Sigma_{OX}}$. Действительно:

$$\overrightarrow{P_1} = (1-1)x \cdot \vec{i} - (1+1)y \cdot \vec{j} = -2y \cdot \vec{j} = \overrightarrow{\Sigma_{OX}}$$

Используя (III), можно записать: $\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{P_{k\frac{1}{k}}} = \frac{1}{k}\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}} = \overrightarrow{\Sigma_{OX}}$ или $\overrightarrow{P_k} = k\overrightarrow{\Sigma_{OX}} - k\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}}$. Зная же (I) - $\overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{G_O^k} + k\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$ и складывая с предыдущим выражением, получаем: $\overrightarrow{G_O^k} + k\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}} = \vec{0}$. А это соответствует очевидному $G_O^k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \to T$, т. е.

$$\overrightarrow{G_O^k} + k\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}} = \vec{0} \Rightarrow G_O^k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \to T,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2. $$\frac{1}{k}\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}} = \overrightarrow{\Sigma_{OX}} \Rightarrow P_k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \to \Sigma_{OX}$$

Доказательство:

Используя (II) и Следствие 1, можно записать: $\overrightarrow{G_O^k} = \overrightarrow{P_k} - k \cdot \overrightarrow{\Sigma_{OX}}$ и $\overrightarrow{G_O^k} = -k\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}}$. Откуда получаем: $k \cdot \overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \overrightarrow{P_k} + k\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}}$ или $\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \frac{1}{k}\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}}$. Зная известную композицию геометрических преобразований $P_k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \to \Sigma_{OX}$, окончательно можем записать:

$$\frac{1}{k}\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}} = \overrightarrow{\Sigma_{OX}} \Rightarrow P_k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \to \Sigma_{OX},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 3. $$\overrightarrow{P_k} = \frac{1}{n+1}\left(\overrightarrow{P_{kn}} + n\overrightarrow{P_{k\frac{1}{n}}}\right).$$

Доказательство:

Используя (III), запишем: $\overrightarrow{G_O^n} = \overrightarrow{P_{kn}} - n\overrightarrow{P_k}$. Подставляя сюда вместо n $\frac{1}{n}$, получаем: $\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{n}}} = \overrightarrow{P_{k\frac{1}{n}}} - \frac{1}{n}\overrightarrow{P_k}$ или $n\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{n}}} = n\overrightarrow{P_{k\frac{1}{n}}} - \overrightarrow{P_k}$. Но из Следствия 1 имеем: $\overrightarrow{G_O^n} + n\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{n}}} = \vec{0}$. Таеким образом, можно записать:

$$\overrightarrow{P_{kn}} - n\overrightarrow{P_k} + n\overrightarrow{P_{k\frac{1}{n}}} - \overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{P_{kn}} + n\overrightarrow{P_{k\frac{1}{n}}} - (n+1)\overrightarrow{P_k} = \vec{0}.$$

Откуда получаем: $\overrightarrow{P_k} = \dfrac{1}{n+1}\left(\overrightarrow{P_{kn}} + n\overrightarrow{P_{k\frac{1}{n}}}\right)$,

что и требовалось доказать.

А при $k = 1$ будем иметь: $\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \dfrac{1}{n+1}\left(\overrightarrow{P_n} + n\overrightarrow{P_{\frac{1}{n}}}\right)$.

Следствие 4. Очевидная композиция преобразований $P_k \oplus P_{\frac{1}{k}} \to T$ не имеет векторного аналога

Доказательство:

Рассмотрим векторное выражение: $a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{P_{\frac{1}{k}}} = \vec{0}$. Ему соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} a(k-1) + b\left(\dfrac{1}{k} - 1\right) = 0 \\ a(k+1) + b\left(\dfrac{1}{k} + 1\right) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a(k-1) - \dfrac{b}{k}(k-1) = 0 \\ a(k+1) + \dfrac{b}{k}(k+1) = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем: $a = \dfrac{b}{k}$, из второго: $a = -\dfrac{b}{k}$. Т. е. имеем явное противоречие. Из чего можно заключить, что композиция преобразований $P_k \oplus P_{\frac{1}{k}} \to T$ не имеет векторного аналога

Следствие 5. $\overrightarrow{G_O^k} = \dfrac{k}{1+k}\left(\dfrac{1}{k}\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{P_{\frac{1}{k}}}\right)$

Доказательство:

Из (I) и частного случая Следствия 3 соответственно имеем: $\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \overrightarrow{G_O^k}$, $\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \dfrac{1}{k+1}\left(\overrightarrow{P_k} + k\overrightarrow{P_{\frac{1}{k}}}\right)$. Подставляя второе выражение в первое и приводя подобные члены, получаем искомый результат: $\overrightarrow{G_O^k} = \dfrac{k}{1+k}\left(\dfrac{1}{k}\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{P_{\frac{1}{k}}}\right)$.

3. Алгебра преобразований, векторных формул

Обозначим в целях упрощения векторную функцию $\overrightarrow{G_O^k}$ через $\overrightarrow{G_k}$, т. к. все преобразования $\vec{G}$ рассматириваются относительно точки $\boldsymbol{O}(0,0)$ – начала координат.

Выведем правила, по которым можно производить операции сложения и вычитания между преобразованиями $\vec{G}$, $\vec{\Sigma}$, $\vec{P}$.

Теорема

Преобразования $\overrightarrow{G_0}$ и $\overrightarrow{P_0}$ переводят любую точку плоскости в начало координат.

Доказательство:

Пусть дана точка $A(x_0, y_0)$. Найдём для этой точки её образы $A \xrightarrow{\overline{G_0(A)}} A^*$ и $A \xrightarrow{\overline{P_0(A)}} A^*$. Данные преобразования (имеются в виду векторные функции) равны между собой. Действительно:

$$\overrightarrow{G_0(A)} = \overrightarrow{P_0(A)} = -x_0 \cdot \vec{i} - y_0 \cdot \vec{j} \text{ (см. Формулы (1) и (2))}$$

Вектор образа $\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{G_0(A)} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} - x_0 \cdot \vec{i} - y_0 \cdot \vec{j} = \vec{0}$. Таким образом, преобразования $\overrightarrow{G_0}$ и $\overrightarrow{P_0}$ переводят любую точку плоскости в начало координат

Что и требовалось доказать.

Выведем следующие правила сложения преобразований и разложения преобразований на элементарные преобразования. Элементарными будем называть такие преобразования, у которых множители равны 1.

Например: $3\overrightarrow{P_2}$ - не элементарное преобразование, а $\overrightarrow{G_3}$ - элементарное.

Зная возможные композиции преобразований (a) – (f), выведем правила для векторных композиций.

Правила сложения

$$a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{G_n} = x\overrightarrow{P_y} \tag{5}$$

$$a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = x\overrightarrow{G_y} \tag{6}$$

$$a\overrightarrow{G_k} + b\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = x\overrightarrow{P_y} \tag{7}$$

$$a\overrightarrow{G_k} + b\overrightarrow{G_n} = x\overrightarrow{G_0} \tag{8}$$

Правила разложения на элементарные преобразования

$$a\overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{P_x} + \overrightarrow{G_y} \tag{9}$$

$$a\overrightarrow{G_k} = \overrightarrow{G_x} \tag{10}$$

$$a\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \overrightarrow{P_x} + \overrightarrow{G_y} \tag{11}$$

Вывод (5):

Выражение (5) можно представить в виде системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} ak - a + bn - b = xy - x \\ -ak - a + bn - b = -xy - x \end{cases}$$

Решая данную систему, находим: $x = a + b - bn$, $y = \dfrac{ak}{a + b - bn}$. Таким образом, получаем правило сложения:

$$a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{G_n} = (a + b - bn)\overrightarrow{P_{\frac{ak}{a+b-bn}}}, \text{ где } a + b \neq bn. \tag{5*}$$

Вывод (6):

Из $a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = x\overrightarrow{G_y}$ следует система уравнений:

$$\begin{cases} ak - a = xy - x \\ -ak - a - 2b = -xy - x \end{cases},$$

решая которую, находим: $x = a + b$, $y = \dfrac{ak + b}{a + b}$. Т. е. получаем такое правило:

$$a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = (a + b)\overrightarrow{G_{\frac{ak+b}{a+b}}}, \tag{6*}$$

где $a \neq -b$.

Вывод (7):

Аналогично предыдущему, из начальной формулы (7), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} ak - a = yx - x \\ ak - a - 2b = -xy - x \end{cases}.$$

И получаем следующие решения это системы: $x = a + b - ak$, $y = \dfrac{b}{a + b - ak}$. Окончательно:

$$a\overrightarrow{G_k} + b\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = (a + b - ak)\overrightarrow{P_{\frac{b}{a+b-ak}}}, \tag{7*}$$

Вывод (8):

Исходной формуле $a\overrightarrow{G_k} + b\overrightarrow{G_n} = x\overrightarrow{G_0}$ соответствует равенство: $ak - a + bn - b = -x$. Т. е. получаем такое правило сложения:

$$a\overrightarrow{G_k} + b\overrightarrow{G_n} = (a + b - ak - bn)\overrightarrow{G_0}\ . \qquad (8^*)$$

Заметим, что не существует правила сложения, соответствующего композиции (d), т. к. в этом случае получаем противоречивую систему уравнений.

Приступим к выводу формул разложения на элементарные преобразования.

Вывод (9):

Выражению $a\overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{P_x} + \overrightarrow{G_y}$ соответствует система уравнений

$$\begin{cases} ak - a = x - 1 + y - 1 \\ -ak - a = -x - 1 + y - 1 \end{cases}.$$

Находим решения: $x = ak$, $y = 2 - a$. Получаем первое правило разложения:

$$a\overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{P_{ak}} + \overrightarrow{G_{2-a}}\ . \qquad (9^*)$$

Не составляет труда вывести и остальные два правила разложения.

$$a\overrightarrow{G_k} = \overrightarrow{G_{a(k-1)+1}}\ . \qquad (10^*)$$

$$a\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \overrightarrow{P_a} + \overrightarrow{G_{2-a}}\ . \qquad (11^*)$$

Сведём полученные формулы в таблицу.

Таблица 2

$a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{G_n} = (a + b - bn)\overrightarrow{P_{\frac{ak}{a+b-bn}}}$,	$a + b \neq bn$	(5*)
$a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = (a + b)\overrightarrow{G_{\frac{ak+b}{a+b}}}$,	$a \neq -b$	(6*)
$a\overrightarrow{G_k} + b\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = (a + b - ak)\overrightarrow{P_{\frac{b}{a+b-ak}}}$	$a + b \neq ak$	(7*)
$a\overrightarrow{G_k} + b\overrightarrow{G_n} = (a + b - ak - bn)\overrightarrow{G_0}$		(8*)
$a\overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{P_{ak}} + \overrightarrow{G_{2-a}}$		(9*)
$a\overrightarrow{G_k} = \overrightarrow{G_{a(k-1)+1}}$		(10*)
$a\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \overrightarrow{P_a} + \overrightarrow{G_{2-a}}$.		(11*)

Сделаем небольшое замечание. Из (9*) и (11*) следует: $\boldsymbol{a}\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \overrightarrow{\boldsymbol{P}_a} + \boldsymbol{a}\overrightarrow{\boldsymbol{P}_k} - \overrightarrow{\boldsymbol{P}_{ak}}$ или $\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{P}_a} + \boldsymbol{a}\overrightarrow{\boldsymbol{P}_k} - \overrightarrow{\boldsymbol{P}_{ak}}\right)$. Для $\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$ коэффициент подобия $\boldsymbol{k}$ не играет никакой роли, поэтому его можно выбирать произвольно. Например, при $\boldsymbol{k} = \mathbf{1}$ получим $\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1}$. А ранее мы действительно отмечали, что $\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1}$.

4. Примеры задач

Пиведём примеры задач, при решении которых используются формулы (5*) – (11*).

Пример 1. Представить композицию преобразований, заданных векторными функциями $\mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2} + \overrightarrow{\Sigma_{OX}} - \mathbf{2}\overrightarrow{\boldsymbol{G}_4}$ в виде элементарных преобразований.

Решение:

$$\mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2} + \overrightarrow{\Sigma_{OX}} = (\mathbf{3} + \mathbf{1})\overrightarrow{\boldsymbol{G}_{\frac{3\cdot 2+1}{3+1}}} = \mathbf{4}\overrightarrow{\boldsymbol{G}_{\frac{7}{4}}}$$

Здесь мы воспользовались правилом (7*). Далее, используя формулу (8*), получаем:

$$\mathbf{4}\overrightarrow{\boldsymbol{G}_{\frac{7}{4}}} - \mathbf{2}\overrightarrow{\boldsymbol{G}_4} = (\mathbf{4} + \mathbf{4} - \mathbf{7} + \mathbf{8})\overrightarrow{\boldsymbol{G}_0} = \mathbf{9}\overrightarrow{\boldsymbol{G}_0}$$

Окончательно приходим к ответу используя формулу (10*)

$$\mathbf{9}\overrightarrow{\boldsymbol{G}_0} = \overrightarrow{\boldsymbol{G}_{9(0-1)+1}} = \overrightarrow{\boldsymbol{G}_{-8}}\text{, т. е.}$$

$$\mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2} + \overrightarrow{\Sigma_{OX}} - \mathbf{2}\overrightarrow{\boldsymbol{G}_4} = \overrightarrow{\boldsymbol{G}_{-8}}$$

Пример 2. Решить уравнение $\mathbf{4}\overrightarrow{\boldsymbol{P}_3} - \mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{G}_2} - \overrightarrow{\boldsymbol{X}} = \overrightarrow{\boldsymbol{P}_{12}}$ в элементарных преобразованиях.

Решение:

$$\mathbf{4}\overrightarrow{\boldsymbol{P}_3} - \mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{G}_2} = (\mathbf{4} - \mathbf{3} + \mathbf{6})\overrightarrow{\boldsymbol{P}_{\frac{12}{4-3+6}}} = \mathbf{7}\overrightarrow{\boldsymbol{P}_{\frac{12}{7}}}\,,$$

$$\mathbf{7}\overrightarrow{\boldsymbol{P}_{\frac{12}{7}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{P}_{12}} + \overrightarrow{\boldsymbol{G}_{2-7}} = \overrightarrow{\boldsymbol{P}_{12}} + \overrightarrow{\boldsymbol{G}_{-5}}\,,$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{P}_{12}} + \overrightarrow{\boldsymbol{G}_{-5}} - \overrightarrow{\boldsymbol{X}} = \overrightarrow{\boldsymbol{P}_{12}}\text{, откуда } \overrightarrow{\boldsymbol{X}} = \overrightarrow{\boldsymbol{G}_{-5}}$$

В заключение заметим, что полученные результаты можно расширить новыми формулами, введя по аналогии с $\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$ преобразование $\overrightarrow{\Sigma_{OY}}$. Т. е. преобразование осевой симметрии относительно оси *OY*.